Μαθηματικά Πληροφορικής

3ο Μάθημα

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Δομική επαγωγή

- Η ιδέα της μαθηματικής επαγωγής μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες δομές εκτός από το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών.
- Μπορούμε να μιμηθούμε τον επαγωγικό ορισμό του συνόλου των φυσικών για να ορίσουμε επαγωγικά νέες δομές.
- Σε αυτές τις δομές μπορούμε να κάνουμε επαγωγή για να αποδείξουμε ιδιότητες.

Παράδειγμα επαγωγικού ορισμού

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Ορίζουμε ένα σύνολο S ως εξής:
  Βάση του ορισμού: $3 \in S$
  Επαγωγικό βήμα: Αν $x, y \in S$ τότε και $x + y \in S$
- $S = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots\}$
- Ποιο είναι το σύνολο S;
- Διαισθητικά, το S περιέχει τα πολλαπλάσια του 3. Πώς το αποδεικνύουμε;

Παράδειγμα επαγωγικού ορισμού (συνέχ.)

- Έστω A το σύνολο των πολλαπλασίων του 3, που ορίζεται περιγραφικά:
$$A = \{3n : n \in \mathbb{N}\}.$$
- Θέλουμε να δείξουμε ότι τα δυο σύνολα είναι ίσα, $A = S$.
  - $A \subseteq S$, δηλαδή ότι κάθε θετικό πολλαπλάσιο του 3 ανήκει στο S. Θα το κάνουμε με μαθηματική επαγωγή.
  - $S \subseteq A$, δηλαδή ότι κάθε αριθμός που παράγεται με τους παραπάνω κανόνες, είναι πολλαπλάσιο του 3. Θα το κάνουμε με δομική επαγωγή.

Απόδειξη του $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{S}$

Απόδειξη.

- Θα δείξουμε με μαθηματική επαγωγή ότι για κάθε n ισχύει ότι $3n \in S$.
- Βάση της επαγωγής: Επιβεβαιώνουμε ότι $3 \in S$ από τη βάση του ορισμού του συνόλου S.
- Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι $3n \in S$. Θα δείξουμε ότι $3(n+1) \in S$.
  - Παρατηρούμε ότι $3 \in S$, και $3n \in S$.
  - Άρα $3 + 3n \in S$.

□

Απόδειξη του $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{A}$

Δομική Επαγωγή.

- Θα δείξουμε ότι και οι δύο κανόνες που παράγουν στοιχεία του S παράγουν πολλαπλάσια του 3.
- Βάση δομικής επαγωγής: Η βάση του ορισμού παράγει μόνο ένα στοιχείο, το 3, που είναι πολλαπλάσιο του 3.
- Επαγωγικό βήμα: Αν $x, y \in S$ με x, y πολλαπλάσια του 3, αρκεί να δείξουμε ότι $x + y$ είναι επίσης πολλαπλάσιο του 3. Αυτό όμως είναι προφανές.

□

Δομική επαγωγή

Ορισμός (Δομική επαγωγή)

Έστω σύνολο ή δομή Δ που ορίζεται επαγωγικά. Για να αποδείξουμε μια ιδιότητα P για κάθε στοιχείο του συνόλου Δ αρκεί να ακολουθήσουμε τα επόμενα βήματα:

- Βάση της επαγωγής: Αποδεικνύουμε ότι τα στοιχεία του συνόλου Δ που ορίζονται στο βήμα *Βάση του ορισμού* του έχουν την ιδιότητα.
- Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε ότι σε κάποιο βήμα της κατασκευής του Δ, τα στοιχεία του έχουν την ιδιότητα. Αποδεικνύουμε ότι αν τα στοιχεία του Δ έχουν την ιδιότητα P, τότε και τα νέα στοιχεία που ορίζονται στο *επαγωγικό βήμα* του ορισμού του Δ έχουν την ιδιότητα.

Αλφάβητο

Ορισμός

Αλφάβητο είναι ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο. Τα στοιχεία του καλούνται σύμβολα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Παραδείγματα)

- $G = \{\alpha, \beta, \ldots, \omega\}$
- $D = \{0, 1, \ldots, 9\}$

Συμβολοσειρές

Ορισμός

Οι πεπερασμένες ακολουθίες συμβόλων ενός αλφαβήτου λέγονται συμβολοσειρές. Το σύνολο όλων των συμβολοσειρών ενός αλφαβήτου Σ συμβολίζεται με Σ^*.
Η κενή συμβολοσειρά συμβολίζεται με ε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Παραδείγματα συμβολοσειρών)

- Η συμβολοσειρά $(\epsilon, \upsilon, \rho, \eta, \kappa, \alpha)$ του αλφαβήτου $\Sigma = \{\alpha, \beta, \dots, \omega\}$. Για απλότητα παραλείπουμε παρενθέσεις και κόμματα και γράφουμε $\epsilon\upsilon\rho\eta\kappa\alpha$.
- Οι συμβολοσειρές του αλφαβήτου $D = \{0, 1, \dots, 9\}$ είναι

$$D^* = \{\varepsilon, 0, 1, \dots, 9, 00, 01, \dots, 99, 000, 001, \dots\}$$

Παράδειγμα δομικής επαγωγής Ορισμός δομικής επαγωγής Συμβολοσειρές Γλώσσες Δυαδικά δένδρα

Επαγωγικός ορισμός συμβολοσειρών

Ορισμός (Σύνολο συμβολοσειρών Σ^* αλφάβητου Σ)

- Βάση του ορισμού: Η κενή συμβολοσειρά ε ανήκει στο Σ^*.
- Επαγωγικό βήμα: Αν $w \in \Sigma^*$ και $\sigma \in \Sigma$ τότε $w\sigma \in \Sigma^*$.

Παράδειγμα δομικής επαγωγής Ορισμός δομικής επαγωγής Συμβολοσειρές Γλώσσες Δυαδικά δένδρα

Μήκος συμβολοσειράς

Ορισμός (Μήκος ℓ συμβολοσειράς)

- Βάση του ορισμού: Ορίζουμε $\ell(\varepsilon) = 0$.
- Επαγωγικό βήμα: Αν $w \in \Sigma^*$ και $\sigma \in \Sigma$ ορίζουμε $\ell(w\sigma) = \ell(w) + 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- $\ell(\epsilon\upsilon\rho\eta\kappa\alpha) = 6$
- $\ell(010) = 3$

Παράδειγμα δομικής επαγωγής Ορισμός δομικής επαγωγής Συμβολοσειρές Γλώσσες Δυαδικά δένδρα

Παράθεση δύο συμβολοσειρών

Ορισμός (Παράθεση δύο συμβολοσειρών)

- Βάση του ορισμού: Αν $w \in \Sigma^*$ ορίζουμε $w \circ \varepsilon = w$
- Επαγωγικό βήμα: Αν $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ και $\sigma \in \Sigma$ ορίζουμε $w_1 \circ (w_2\sigma) = (w_1 \circ w_2)\sigma$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- $\epsilon\upsilon \circ \rho\eta\kappa\alpha = \epsilon\upsilon\rho\eta\kappa\alpha$
- $010 \circ 00 = 01000$

Μήκος παράθεσης δυο συμβολοσειρών

Πρόταση

Για κάθε συμβολοσειρές $x, y \in \Sigma^*$, $\ell(x \circ y) = \ell(x) + \ell(y)$.

Απόδειξη με δομική επαγωγή. Θεωρούμε τη συμβολοσειρά x σταθερά.

- Η δομική επαγωγή γίνεται πάνω στον επαγωγικό ορισμό της συμβολοσειράς y.
- Στη βάση της επαγωγής $y = \varepsilon$.
- Στο επαγωγικό βήμα θεωρούμε συμβολοσειρά της μορφής $y\sigma$, $\sigma \in \Sigma$.

Μήκος παράθεσης δυο συμβολοσειρών

Πρόταση

Για κάθε συμβολοσειρές $x, y \in \Sigma^*$, $\ell(x \circ y) = \ell(x) + \ell(y)$.

Απόδειξη.

Βάση της επαγωγής: $y = \varepsilon$. Έχουμε $\ell(x \circ \varepsilon) = \ell(x) + \ell(\varepsilon)$.
Επαγωγικό βήμα:

$$\begin{aligned}
\ell(x \circ (y\sigma)) &= \ell((x \circ y)\sigma) && \text{από τον ορισμό της παράθεσης}\\
&= \ell(x \circ y) + 1 && \text{από τον ορισμό του μήκους}\\
&= (\ell(x) + \ell(y)) + 1 && \text{από την επαγωγική υπόθεση}\\
&= \ell(x) + (\ell(y) + 1) &&\\
&= \ell(x) + \ell(y\sigma) && \text{από τον ορισμό του μήκους.}
\end{aligned}$$

$\square$

Γλώσσες

Ορισμός

Έστω Σ ένα αλφάβητο. Γλώσσα καλείται ένα σύνολο συμβολοσειρών του Σ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Παραδείγματα γλωσσών)

- Η γλώσσα της δεκαδικής παράστασης των περιττών αριθμών: $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$. Το αλφάβητο είναι το $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$.
- Η γλώσσα της δυαδικής παράστασης των περιττών αριθμών: $\{1, 11, 101, 111, \ldots\}$. Το αλφάβητο είναι το $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$ ή το $\Sigma = \{0, 1\}$.
- Οι δυο γλώσσες είναι διαφορετικές. Τα στοιχεία τους είναι συμβολοσειρές, όχι αριθμοί.
- Άλλο είναι το σύνολο των περιττών αριθμών και άλλο είναι το σύνολο της δεκαδικής παράστασης των περιττών.

Παραδείγματα γλωσσών (συνέχ.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Παραδείγματα γλωσσών)

- Οι λέξεις της Ελληνικής γλώσσας σε πεζούς χαρακτήρες: {αβαείο, αβαθής, . . . , ωώδης}. Το αλφάβητο είναι {α, β,. . . ,ω, ά, . . . ώ}.
- Τα συντακτικά ορθά προγραμμάτα της γλώσσας C. Το αλφάβητο είναι οι λατινικοί χαρακτήρες και κάποια επιπλέον σύμβολα όπως οι παρενθέσεις, τα σύμβολα των αριθμητικών πράξεων κλπ.
- Τα προγράμματα της γλώσσας C που υπολογίζουν ορθά αν η είσοδος είναι ένας πρώτος αριθμός (στο δεκαδικό σύστημα).

Παράδειγμα επαγωγικού ορισμού γλώσσας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Ας ορίσουμε μια γλώσσα L του αλφαβήτου $\{0,1\}$ ως εξής:
- Βάση του ορισμού: Η κενή συμβολοσειρά ε ανήκει στη γλώσσα L.
- Επαγωγικό βήμα: Αν $w, v \in L$ τότε και οι συμβολοσειρές
  - $0w1v$
  - $1w0v$

  ανήκουν στη γλώσσα L.
- Ποιές συμβολοσειρές ανήκουν στην L;
- $L = \{$ ε , 01, 10 , 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100 , 000111, 001011, 001101, 001110, $\ldots$ $\}$

Παράδειγμα γλώσσας (συνέχ.)

Πρόταση

Κάθε συμβολοσειρά u της γλώσσας L έχει ίσο αριθμό από 0 και 1.

Απόδειξη.

- $n_0(u)$ = αριθμός 0 στην u
- $n_1(u)$ = αριθμός 1 στην u
- Θέλουμε να δείξουμε $n_0(u) = n_1(u)$ για κάθε $u \in L$.

- Με δομική επαγωγή.
- Βάση της επαγωγής: $n_0(\varepsilon) = n_1(\varepsilon) = 0$.
- Επαγωγικό βήμα:
  - Επαγωγική υπόθεση $n_0(w) = n_1(w)$ και $n_0(v) = n_1(v)$.
  - Έχουμε $n_0(0w1v) = n_0(w) + n_0(v) + 1$
  - Έχουμε $n_1(0w1v) = n_1(w) + n_1(v) + 1$
  - Άρα $n_0(0w1v) = n_1(0w1v)$
  - Ομοίως προκύπτει $n_0(1w0v) = n_1(1w0v)$.

Παράδειγμα γλώσσας (συνέχ.)

Πρόταση

Κάθε συμβολοσειρά w του αλφαβήτου $\{0,1\}$ με ίσο αριθμό από 0 και 1 ανήκει στη γλώσσα L.

Απόδειξη.

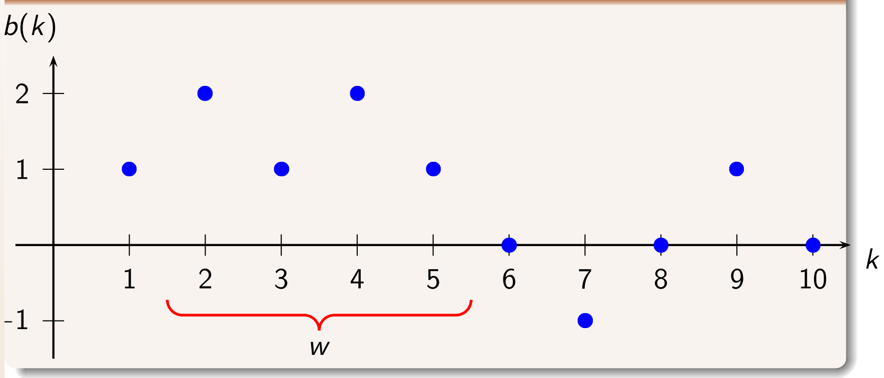
Με ισχυρή μαθηματική επαγωγή στο μήκος της συμβολοσειράς.
Βάση της επαγωγής: Αν $\ell(w) = 0$, δηλ. $w = \varepsilon$, $w \in L$.
Επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι κάθε συμβολοσειρά με μήκος το πολύ n που έχει ίσο αριθμό από 0 και 1 ανήκει στην L.

- Έστω μια συμβολοσειρά u με μήκος το πολύ $n+1$ και ίσο αριθμό από 0 και 1.
- Λόγω συμμετρίας υποθέτουμε ότι η συμβολοσειρά u αρχίζει με 0.
- Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν $w, v \in L$ τέτοια ώστε $u = 0w1v$.

Απόδειξη πρότασης

Έστω ότι $b(k)$ συμβολίζει τη διαφορά του αριθμού των 0 και του αριθμού των 1 στα πρώτα k σύμβολα της συμβολοσειράς u.

Η συνάρτηση $b(k)$ για $u = 0010111001$

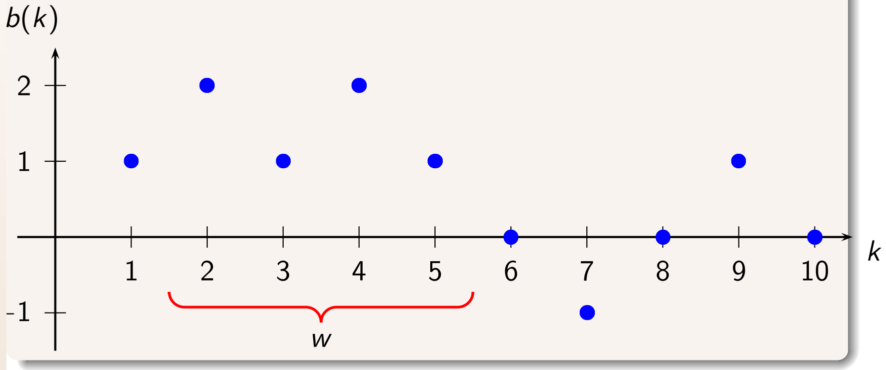


$u = 0010111001 = 0010111001$

Απόδειξη πρότασης

Έστω ότι $b(k)$ συμβολίζει τη διαφορά του αριθμού των 0 και του αριθμού των 1 στα πρώτα k σύμβολα της συμβολοσειράς u.

Η συνάρτηση $b(k)$ για $u = 0010111001$



$u = 0010111001 = 0\color{red}{010111}001$

Απόδειξη πρότασης (συνέχεια)

Έστω $u = \sigma_1 \ldots \sigma_\ell$. Ορίζουμε $k^* = \min\{k \mid b(k+1) = 0\}$. Επειδή $b(\ell) = 0$, παίρνουμε:

Παρατήρηση

Το k^* είναι καλά ορισμένο και ισχύει ότι $k^* \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$.

Αν $\sigma_{k^*+1} = 0$, το αρχικό μηδέν έχει «ακυρωθεί» πριν τη θέση $k^* + 1$. Άρα:

Παρατήρηση

Δεδομένου ότι $\sigma_1 = 0$, τότε $\sigma_{k^*+1} = 1$.

Ισχύει λοιπόν ότι $u = \color{red}{0}\sigma_2 \ldots \sigma_{k^*}\color{red}{1}\sigma_{k^*+2} \ldots \sigma_\ell$.

Απόδειξη πρότασης (συνέχεια)

Ορίζουμε $w = \sigma_2 \ldots \sigma_{k^*}$ και

$$v = \begin{cases} \varepsilon & \text{αν } k^* = \ell - 1 \\ \sigma_{k^*+2} \ldots \sigma_\ell & \text{αν } k^* < \ell - 1 \end{cases}$$

Παρατήρηση

Τα w και v έχουν ίσο πλήθος από μηδέν και άσους. Άρα $u = 0w1v$ όπου από την Επαγωγική Υπόθεση, $w, v \in L$.

Κανονικά Δυαδικά Δέντρα

Ο παρακάτω ορισμός μας είναι οικείος από τις Δομές Δεδομένων.

Ορισμός

Ένα κανονικό δυαδικό δένδρο είναι ένα δένδρο T με ρίζα όπου κάθε κορυφή έχει ακριβώς μηδέν ή δύο παιδιά. Το ύψος ενός κανονικού δυαδικού δένδρου ορίζεται ως το μήκος του μεγαλύτερου μονοπατιού από τη ρίζα προς μια κορυφή με μηδέν παιδιά.

Στην επόμενη διαφάνεια θα ορίσουμε μια δομή συναφή με το κανονικό δυαδικό δένδρο.

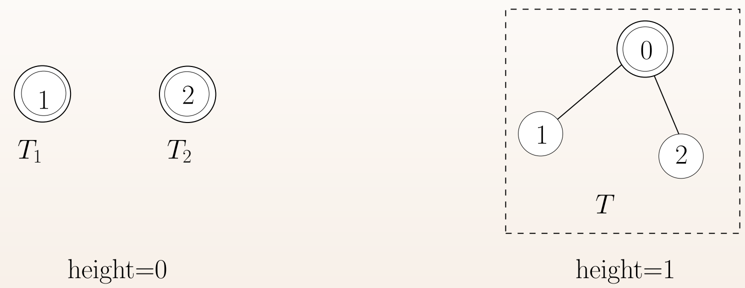
Επαγωγικός ορισμός ΚΔΔ

Ορισμός (ΚΔΔ με κορυφές από το U)

Βάση του ορισμού: Κάθε στοιχείο v του U ορίζει το ΚΔΔ $T = (v, V(T))$. Το T έχει ρίζα το v, σύνολο κορυφών το $V(T) = \{v\}$, και ύψος $h(T) = 0$.
Επαγωγικό βήμα: Έστω T_1, T_2 ΚΔΔ με σύνολα κορυφών ξένα μεταξύ τους και ρίζες r_1, r_2 αντίστοιχα. Έστω επίσης r ένα στοιχείο του U, $r \notin V(T_1) \cup V(T_2)$.

- Ορίζουμε το ΚΔΔ $T = (r, V(T_1) \cup V(T_2) \cup \{r\})$ με ρίζα το r.
- Το σύνολο των κορυφών του T είναι όλες οι κορυφές των T_1, T_2 μαζί με το r.
- Το ύψος $h(T)$ του ΚΔΔ T ορίζεται σαν $1 + \max\{h(T_1), h(T_2)\}$.

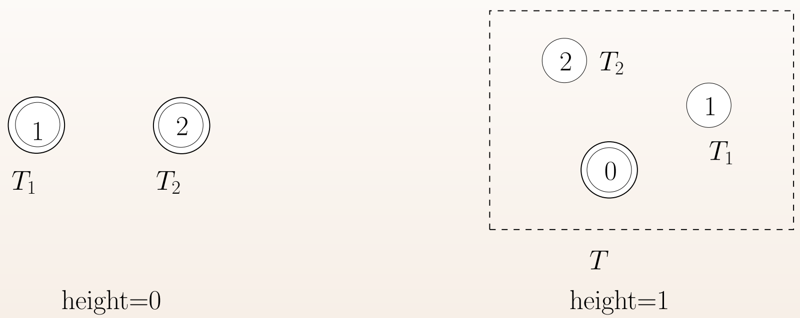
Παραδείγματα ΚΔΔ



Ο ορισμός του ΚΔΔ είναι πιο «ελαφρύς» από τον συνήθη ορισμό κανονικού δυαδικού δένδρου. Δεν υπάρχει η έννοια του πατέρα, του παιδιού, του μονοπατιού.

Οι παραπάνω απεικονίσεις προσθέτουν χαρακτηριστικά που δεν υπάρχουν στον ορισμό του ΚΔΔ.

Παραδείγματα ΚΔΔ



Αυτή η απεικόνιση είναι πιο πιστή στον επαγωγικό ορισμό που δώσαμε.

Ο «ελαφρύς» ορισμός είναι πάντως αρκετός για να δείξουμε την πρόταση που ακολουθεί.

Ύψος ΚΔΔ

Πρόταση

Για κάθε ΚΔΔ T ισχύει ότι το πλήθος $n(T)$ των κορυφών του είναι το πολύ $2^{h(T)+1} - 1$.

Απόδειξη.

- Βάση δομικής επαγωγής: Αν το ΚΔΔ αποτελείται μόνο από τη ρίζα του, έχει εξ ορισμού ύψος 0 και μία κορυφή.
- Επαγωγικό βήμα: Έστω ΚΔΔ $T = (r, V(T_1) \cup V(T_2) \cup \{r\})$ με ρίζα το r, όπου T_1, T_2 είναι ΚΔΔ. Άρα $n(T) = n(T_1) + n(T_2) + 1$. Επίσης εξ ορισμού, το ύψος του είναι $h(T) = 1 + \max\{h(T_1), h(T_2)\}$.
- Επαγωγική υπόθεση: $n(T_1) \leq 2^{h(T_1)+1} - 1$ και $n(T_2) \leq 2^{h(T_2)+1} - 1$.

□

Ύψος ΚΔΔ (συνέχ.)

Συνέχ.

$$
\begin{aligned}
n(T) &= n(T_1) + n(T_2) + 1 \\
&\leq (2^{h(T_1)+1} - 1) + (2^{h(T_2)+1} - 1) + 1 \\
&= 2^{h(T_1)+1} + 2^{h(T_2)+1} - 1 \\
&\leq 2 \cdot \max\{2^{h(T_1)+1}, 2^{h(T_2)+1}\} - 1 \\
&= 2 \cdot 2^{\max\{h(T_1)+1, h(T_2)+1\}} - 1 \\
&= 2 \cdot 2^{\max\{h(T_1), h(T_2)\}+1} - 1 \\
&= 2 \cdot 2^{h(T)} - 1 \\
&= 2^{h(T)+1} - 1
\end{aligned}
$$

$\square$