# Μαθηματικά Πληροφορικής

## 6ο Μάθημα

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

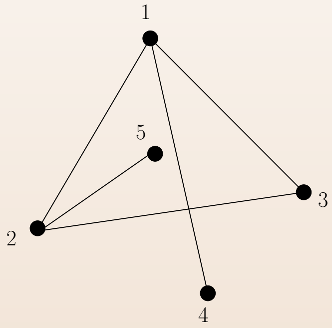
# Βασικές έννοιες

# Τί είναι ένα γράφημα;

**Ορισμός**

Ένα (απλό) γράφημα $G$ είναι ένα ζεύγος $(V, E)$ όπου το $V$ είναι ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο και $E$ είναι ένα σύνολο διμελών υποσυνόλων του $V$.

Τα στοιχεία του $V$ καλούνται κορυφές και τα στοιχεία του $E$ καλούνται ακμές του γραφήματος.



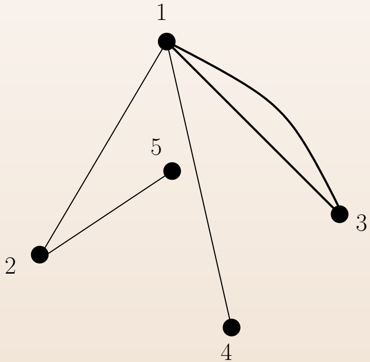

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{4, 1\}, \{2, 5\}\}$

# Πολυγραφήματα

Μερικές φορές χρειαζόμαστε την έννοια του πολυγραφήματος. Σε ένα πολυγράφημα, το σύνολο των ακμών είναι πολυσύνολο, δηλ. υπάρχουν επαναλήψεις ακμών.

Θα αναφέρουμε ρητά τον όρο πολυγράφημα αν τα χρησιμοποιούμε. Ειδάλλως πάντα ασχολούμαστε με απλά γραφήματα.



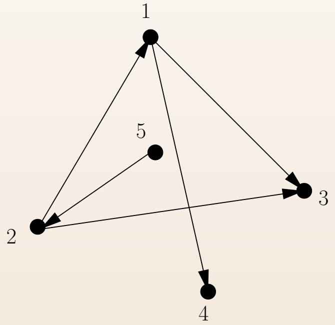

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 3\}, \{4, 1\}, \{2, 5\}\}$$

# Κατευθυνόμενα γραφήματα

**Ορισμός**

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G$ είναι ένα ζεύγος $(V, E)$ όπου το $V$ είναι ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο και $E$ είναι ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών από το $V \times V$



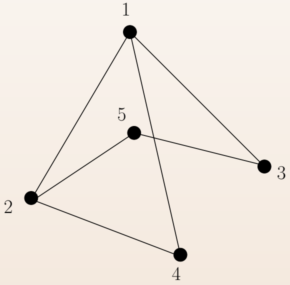

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

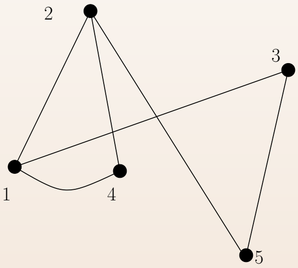
$E = \{(2, 1), (2, 3), (1, 3), (1, 4), (5, 2)\}$

Εν γένει θα μελετήσουμε μη κατευθυνόμενα γραφήματα.

# Σχεδιασμός ενός γραφήματος

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ υπάρχει ανεξάρτητα από τον σχεδιασμό του. Υπάρχουν άπειροι σχεδιασμοί του ίδιου γραφήματος στο επίπεδο. Μεγάλα γραφήματα δεν μπορούμε να τα σχεδιάσουμε ούτως ή άλλως.



## Ορολογία

Έστω $G = (V, E)$. Οι κορυφές (ή κόμβοι) $u$ και $v$ γειτνιάζουν αν $\{u, v\} \in E$. Ισοδύναμα, οι $u$ και $v$ είναι γείτονες.

Η ακμή $\{u, v\} \in E$ έχει δύο άκρα: $u$ και $v$.

Αν $u \in V$ είναι άκρο της ακμής $e \in E$, η $e$ προσπίπτει στην $u$.

Το σύνολο όλων των γειτόνων της $v \in V$ (η γειτονιά της $v$) συμβολίζεται $N(v)$, δηλ.,

$$N(v) = \{u \in V \mid u \text{ γειτνιάζει με τη } v\}.$$

### Ορισμός

Έστω $G = (V, E)$ και $v \in V$. Ο βαθμός της $v$ στο $G$, συμβολικά $d_G(v)$ ή πιο απλά $d(v)$, είναι ο αριθμός των ακμών που προσπίπτουν στη $v$.

Προφανώς, $d(v) = |N(v)|$.

# Άθροισμα των βαθμών

**Θεώρημα**

*Έστω* $G = (V, E)$*. Τότε* $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \cdot |E|$.

**Απόδειξη.**

Κάθε ακμή $\{u, v\} \in E$ συνεισφέρει ακριβώς δύο στο άθροισμα $\sum_{v \in V} d_G(v)$, ένα για κάθε άκρο της. □

**Παρατήρηση**

*Το άθροισμα των βαθμών είναι πάντα άρτιο.*

# Κορυφές περιττού βαθμού

**Θεώρημα**

*Έστω* $G = (V, E)$. *Τότε* $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \cdot |E|$.

**Απόδειξη.**

Κάθε ακμή $\{u, v\} \in E$ συνεισφέρει ακριβώς δύο στο άθροισμα $\sum_{v \in V} d_G(v)$, ένα για κάθε άκρο της. □

**Πόρισμα**

*Σε κάθε γράφημα* $G$ *το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού είναι άρτιο.*

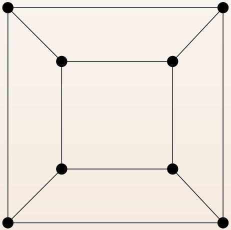
**Παρατήρηση**

*Σε κάθε ομάδα περιττού το πλήθος ατόμων υπάρχει πάντα κάποιος με άρτιο αριθμό γνωριμιών.*

# Επιπλέον ορολογία

Έστω $G$ ένα γράφημα. Τα σύνολα των κορυφών και ακμών συμβολίζονται με $V(G)$ και $E(G)$ αντίστοιχα.

Αν όλες οι κορυφές του $V(G)$ έχουν τον ίδιο βαθμό, καλούμε το $G$ κανονικό. Αν η κοινή τιμή είναι το $r$, το $G$ είναι $r$-κανονικό.



Δοθέντος $G$, συνήθως συμβολίζουμε το $|V(G)|$ με $n$ και το $|E(G)|$ με $m$.

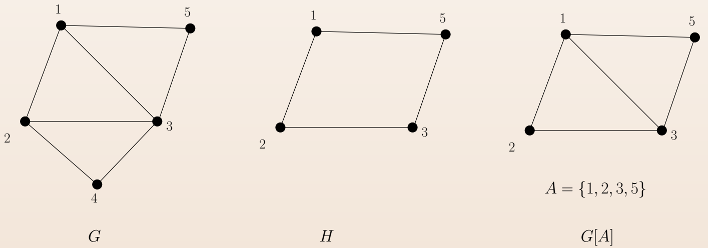
# Υπογραφήματα

## Ορισμός

Το γράφημα $H$ είναι **υπογράφημα** του $G$ αν $V(H) \subseteq V(G)$ και $E(H) \subseteq E(G)$.

## Ορισμός

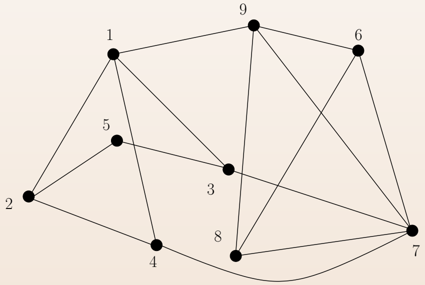
$H$ είναι **εναγόμενο υπογράφημα** του $G$ αν $H = (A, E')$ όπου $A \subseteq V(G)$ και $E' = \{\{u, v\} \in E \mid u \in A \text{ και } v \in A\}$ . Γράφουμε $H = G[A]$.



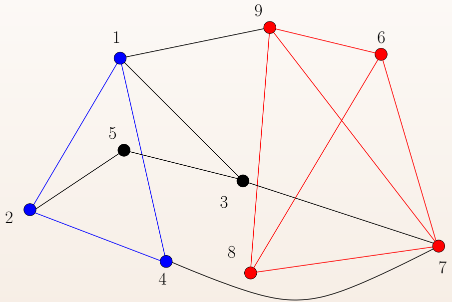
# Κλίκες και Ανεξάρτητα Σύνολα

Ένα γράφημα καλείται κλίκα ή πλήρες γράφημα αν κάθε δύο κορυφές του είναι γειτονικές.
$K_n$ συμβολίζει την κλίκα με $n$ κορυφές. Πόσο είναι το $|E(K_n)|$;

Δίνεται $G$. Ο αριθμός κλίκας $\omega(G)$ του $G$ ορίζεται ως το μέγιστο μέγεθος ενός $S \subseteq V(G)$ έτσι ώστε $G[S]$ είναι κλίκα.



# Κλίκες και Ανεξάρτητα Σύνολα




$\omega(G) = 4$

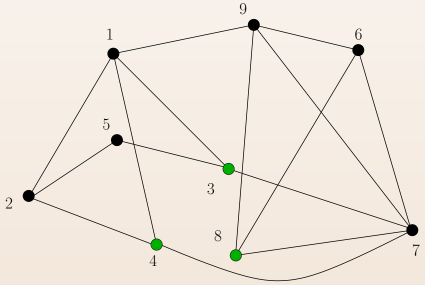
Η κόκκινη κλίκα είναι μέγιστη (maximum). Η μπλε κλίκα είναι μεγιστική (maximal): δεν μπορεί να επεκταθεί με προσθήκη κορυφών. Κάθε μέγιστη κλίκα είναι και μεγιστική, το αντίστροφο δεν ισχύει.

# Κλίκες και Ανεξάρτητα Σύνολα

Έστω $G$ ένα γράφημα. Ένα υποσύνολο $S \subseteq V(G)$ καλείται ανεξάρτητο σύνολο αν κανένα ζευγάρι κορυφών του $S$ δεν είναι γείτονες. Ισοδύναμα

$$E(G[S]) = \varnothing.$$

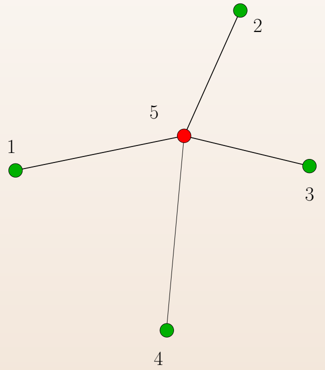
Ο αριθμός ανεξαρτησίας $\alpha(G)$ του $G$ είναι το μέγιστο μέγεθος ανεξάρτητου συνόλου.



# Μεγιστικά και Μέγιστα Ανεξάρτητα Σύνολα

Το κόκκινο ανεξάρτητο σύνολο είναι μεγιστικό, αν προσθέσουμε οποιαδήποτε επιπλέον κορυφή παύει να είναι ανεξάρτητο σύνολο.

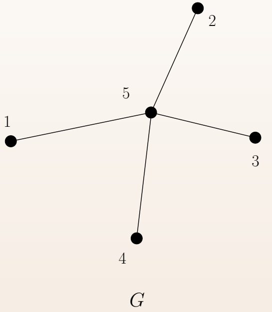
Το πράσινο ανεξάρτητο σύνολο είναι και μέγιστο και μεγιστικό.

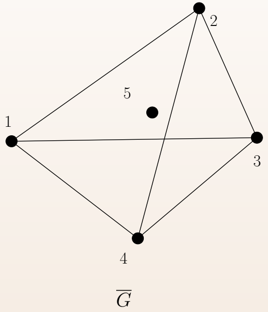



$\alpha(G) = 4$

# Συμπλήρωμα ενός γραφήματος

Δοθέντος $G = (V, E)$ το **συμπλήρωμα** του $G$ είναι το γράφημα $\overline{G} = (V, E')$ όπου $E' = \{\{x, y\} \mid x, y \in V,\ x \neq y,\ \{x, y\} \notin E\}$.




## Παρατήρηση

*Ένα υποσύνολο του $V(G)$ είναι ανεξάρτητο σύνολο στο $G$ ανν και μόνο είναι κλίκα στο $\overline{G}$. Ο αριθμός ανεξαρτησίας του $G$ είναι ίσος με τον αριθμό κλίκας του $\overline{G}$.*

# Αριθμοί Ramsey

**Πρόταση**

*Έστω $G$ γράφημα με έξι κορυφές. Τότε $\omega(G) \geq 3$ ή $\alpha(G) \geq 3$.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι σε ένα οποιοδήποτε σύνολο έξι ανθρώπων υπάρχουν τρεις άνθρωποι που γνωρίζονται μεταξύ τους ή τρεις που δεν γνωρίζονται μεταξύ τους. □

# Αριθμοί Ramsey

**Ορισμός**

Ένας χρωματισμός των ακμών ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι μια ανάθεση χρωμάτων στα στοιχεία του $E$.

**Πρόταση**

*Κάθε χρωματισμός των ακμών του πλήρους γραφήματος $K_6$ με τα χρώματα μπλε και κόκκινο ενάγει ως υπογραφήματα ένα μπλε $K_3$ ή ένα κόκκινο $K_3$.*

# Αριθμοί Ramsey

**Πρόταση**

*Κάθε χρωματισμός των ακμών του πλήρους γραφήματος $K_6$ με τα χρώματα μπλε και κόκκινο ενάγει ως υπογραφήματα ένα μπλε $K_3$ ή ένα κόκκινο $K_3$.*

Απόδειξη. Έστω το ακμοχρωματισμένο $K_6 = (V, E)$. Συμβολίζουμε με $B$ το σύνολο των μπλε ακμών και $R$ το σύνολο των κόκκινων ακμών, άρα $E = B \dot{\cup} R$. Όρισε $G = (V, B)$.

Γνωρίζουμε ότι τι το $G$ περιέχει μία 3-κλίκα ή ένα 3-ανεξάρτητο σύνολο.

- 3-κλίκα στο $G$ σημαίνει μπλε τρίγωνο στο $K_6$.
- 3-ανεξάρτητο σύνολο στο $G$ σημαίνει κόκκινο τρίγωνο στο $K_6$.

$\square$

# Αριθμοί Ramsey

**Ορισμός**

Ένας χρωματισμός των ακμών ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι μια ανάθεση χρωμάτων στα στοιχεία του $E$.

Με $K_n$ συμβολίζουμε την κλίκα (πλήρες γράφημα) με $n$ κορυφές.

**Θεώρημα (Ramsey)**

*Για κάθε θετικούς ακέραιους $k, m \geq 2$ υπάρχει φυσικός $R = R(k, m)$ τέτοιος ώστε κάθε χρωματισμός των ακμών του πλήρους γραφήματος $K_R$ με τα χρώματα μπλε και κόκκινο ενάγει ως υπογραφήματα ένα μπλε $K_k$ ή ένα κόκκινο $K_m$.*

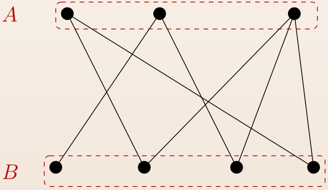
# Διμερή γραφήματα

## Ορισμός

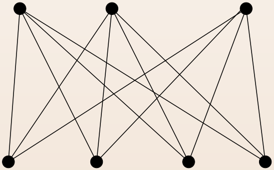
Γράφημα $G = (V, E)$ καλείται διμερές αν $V = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, και για κάθε $\{u, v\} \in E$, $u \in A, v \in B$.

Ένα διμερές γράφημα $G = (V, E)$ με διαμέριση $\{A, B\}$ συμβολίζεται $G = (A \cup B, E)$.

Το πλήρες διμερές γράφημα $G = (A \cup B, E)$ όπου $|A| = n$, $|B| = m$ συμβολίζεται $K_{n,m}$.




$G = (A \cup B, E)$



$K_{3,4}$

# Περίπατοι και μονοπάτια

## Ορισμός

Περίπατος $W$ στο $G = (V, E)$ είναι μια ακολουθία $l + 1$ κορυφών, $l \geq 0$, όπου διαδοχικές κορυφές είναι γειτονικές. Δηλαδή

$$W = (v_0, v_1, \ldots, v_l) \text{ με } \{v_{i-1}, v_i\} \in E,\ i = 1, \ldots, l.$$

Το μήκος του περιπάτου είναι $l$.

$(u, v)$-περίπατος: ξεκινάει από την κορυφή $u$ και τελειώνει στη $v$.

## Ορισμός

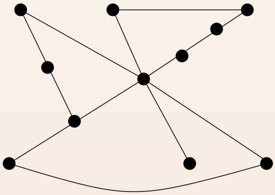
Μονοπάτι σε ένα γράφημα είναι ένας περίπατος χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές.

**Παρατήρηση**: Εάν υπάρχει $(u, v)$-περίπατος στο $G$, τότε υπάρχει και $(u, v)$-μονοπάτι.

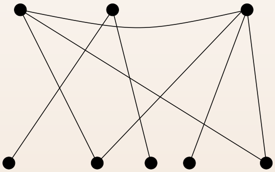
# Συνεκτικότητα

## Ορισμός

$G = (V, E)$ είναι **συνεκτικό** αν για κάθε ζεύγος $u, v \in V$ υπάρχει $(u, v)$-μονοπάτι στο $G$.



connected

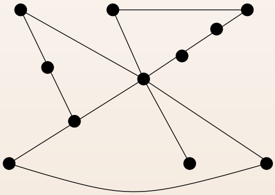


disconnected

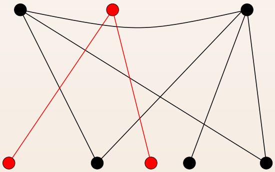
# Συνεκτικότητα

**Ορισμός**

$G = (V, E)$ είναι **συνεκτικό** αν για κάθε ζεύγος $u, v \in V$ υπάρχει $(u, v)$-μονοπάτι στο $G$.



connected

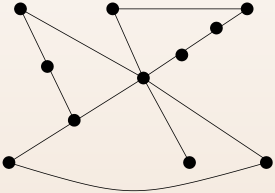


disconnected

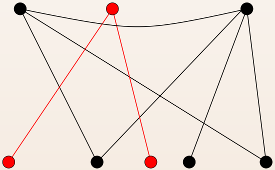
# Συνεκτικές συνιστώσες

## Ορισμός

**Συνεκτική συνιστώσα** του $G = (V, E)$ είναι ένα μεγιστικό συνεκτικό υπογράφημα του $G$.



1 connected component

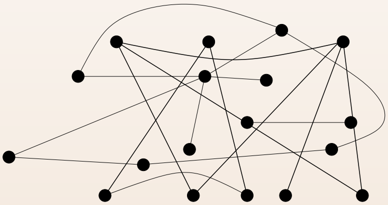


2 connected components

# Συνεκτικές συνιστώσες

## Ορισμός

**Συνεκτική συνιστώσα** του $G = (V, E)$ είναι ένα μεγιστικό συνεκτικό υπογράφημα του $G$.

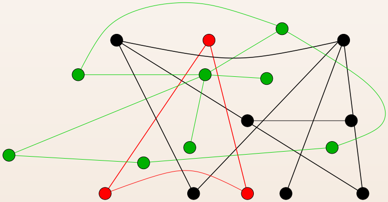


connected or disconnected graph?

# Συνεκτικές συνιστώσες

## Ορισμός

**Συνεκτική συνιστώσα** του $G = (V, E)$ είναι ένα μεγιστικό συνεκτικό υπογράφημα του $G$.

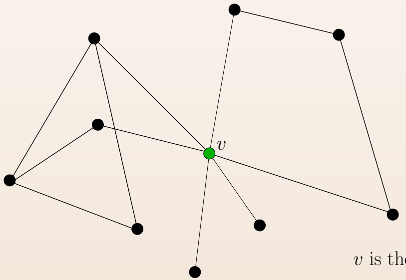


3 connected components

# Αρθρικά σημεία και γέφυρες

## Ορισμός

Έστω $G$ ένα γράφημα. Κορυφή $v \in V(G)$ είναι αρθρικό σημείο αν το $G - v$ έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το $G$. Ακμή $e \in E(G)$ είναι γέφυρα αν το $G - e$ έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το $G$.

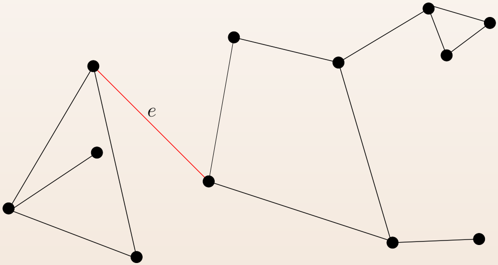



$v$ is the only cut-vertex

# Αρθρικά σημεία και γέφυρες

## Ορισμός

Έστω $G$ ένα γράφημα. Κορυφή $v \in V(G)$ είναι αρθρικό σημείο αν το $G - v$ έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το $G$. Ακμή $e \in E(G)$ είναι γέφυρα αν το $G - e$ έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το $G$.

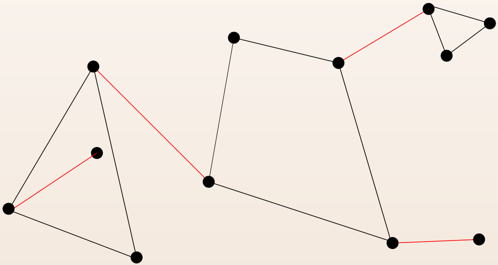



$e$ is a cut-edge

# Αρθρικά σημεία και γέφυρες

## Ορισμός

Έστω $G$ ένα γράφημα. Κορυφή $v \in V(G)$ είναι αρθρικό σημείο αν το $G - v$ έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το $G$. Ακμή $e \in E(G)$ είναι γέφυρα αν το $G - e$ έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το $G$.

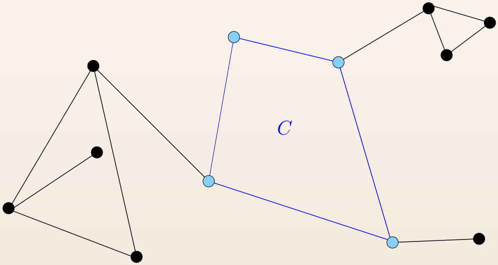


All 4 cut-edges of the graph

# Κύκλοι

## Ορισμός

Έστω $G$ ένα γράφημα. Κύκλος στο $G$ είναι ένας περίπατος μήκους τουλάχιστον τρία στον οποίο η πρώτη και η τελευταία κορυφή συμπίπτουν, αλλά καμία άλλη κορυφή δεν επαναλαμβάνεται.



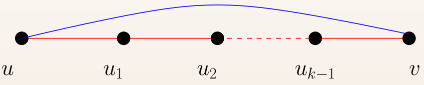

$C$ is a cycle of length 4

# Γέφυρες και κύκλοι

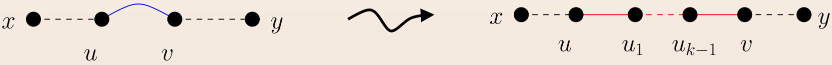
**Λήμμα**

*Έστω $e = \{u, v\}$ γέφυρα του γραφήματος $G$. Τότε η $e$ δεν ανήκει σε κανένα κύκλο.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η $\{u, v\}$ ανήκει σε κύκλο.




Για οποιοδήποτε $(x, y)$-μονοπάτι στο $G$ που χρησιμοποιεί την ακμή $e$ στο $G$, μπορούμε να βρούμε έναν $(x, y)$-περίπατο στο $G - e$.




Το $G - e$ παραμένει συνεκτικό, άτοπο. □

# Δέντρα

# Δάση και δέντρα

Ένα γράφημα λέγεται ακυκλικό αν δεν περιέχει κύκλους.

**Ορισμός**

Ένα ακυκλικό γράφημα $G$ καλείται δάσος.

Τα δάση μπορεί να είναι μη συνεκτικά.

**Ορισμός**

Δέντρο είναι ένα ακυκλικό συνεκτικό γράφημα.

Φύλλο ενός δέντρου καλείται μια κορυφή βαθμού 1.

# Φύλλα

**Λήμμα**

*(i) Κάθε δέντρο με τουλάχιστον δύο κορυφές έχει δύο τουλάχιστον φύλλα.*
*(ii) Η διαγραφή ενός φύλλου από δέντρο $n$ κορυφών παράγει δέντρο $n-1$ κορυφών.*

Αποδειξη. (i) Κάθε συνεκτικό γράφημα με τουλάχιστον δύο κορυφές περιέχει μία ακμή. Αν είναι ακυκλικό τα άκρα ενός μονοπατιού μέγιστου μήκους έχουν ακριβώς έναν γείτονα και πρέπει να είναι πάνω στο μονοπάτι, άρα έχουν βαθμό 1.

(ii) Έστω $v$ είναι φύλλο του δέντρου $G$ και $G' = G - v$. Αν $x, y \in V(G')$, κανένα $(x, y)$-μονοπάτι $P$ στο $G$ δεν μπορεί να περνάει από το $v$, άρα το $P$ περιέχεται και στο $G'$. Συνεπώς $G'$ συνεκτικό. Το $G'$ είναι και ακυκλικό: η διαγραφή του $v$ δεν μπορεί να δημιουργήσει κύκλο. □

# Ισοδύναμοι ορισμοί δέντρου

**Θεώρημα (ΟΔ: Ορισμοί Δέντρου)**

*Για γράφημα $G$, με $n$ κορυφές, $n \geq 1$, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες (και χαρακτηρίζουν δέντρα με $n$ κορυφές):*

1. *Το $G$ είναι συνεκτικό και ακυκλικό.*
2. *Το $G$ είναι συνεκτικό και έχει $n-1$ ακμές.*
3. *Το $G$ έχει $n-1$ ακμές και είναι ακυκλικό.*
4. *Για κάθε $u, v \in V(G)$, υπάρχει ακριβώς ένα $(u, v)$-μονοπάτι στο $G$.*

# Απόδειξη του Θεωρήματος ΟΔ

(1) $\Rightarrow$ (2): [συνεκτικό & ακυκλικό] $\Rightarrow n-1$ ακμές.

Με επαγωγή στο $n$.
Για $n=1$, το γράφημα με μία κορυφή έχει μηδέν ακμές.

Θα αποδείξουμε για $n>1$, υποθέτοντας ότι ισχύει για γραφήματα με λιγότερες από $n$ κορυφές.

Δοθέντος $G$ με $|V(G)|=n$, $G$ έχει φύλλο $v$ και $G'=G-v$ ακυκλικό και συνεκτικό.

Από την Επαγωγική Υπόθεση, $|E(G')|=|V(G')|-1=n-2$.
Άρα $|E(G)|=n-1$.

# Απόδειξη του Θεωρήματος ΟΔ

$(2) \Rightarrow (3)$: [συνεκτικό & $n-1$ ακμές] $\Rightarrow$ ακυκλικό.

Σβήνε μία-μία ακμές από τους κύκλους του $G$ μέχρι να προκύψει ακυκλικό $G'$. Μια ακμή πάνω σε κύκλο δεν είναι γέφυρα άρα το $G'$ συνεκτικό.

Στο $(1) \Rightarrow (2)$ δείξαμε ότι αν ένα γράφημα είναι συνεκτικό και ακυκλικό, έχει $n-1$ ακμές.

Επομένως $|E(G')| = n-1 = |E(G)|$, άρα δεν χρειάστηκε να σβήσουμε καμία ακμή από το $G$. Ήταν ήδη ακυκλικό.

# Απόδειξη του Θεωρήματος ΟΔ

(3) $\Rightarrow$ (1): [ακυκλικό & $n-1$ ακμές] $\Rightarrow$ συνεκτικό.

Έστω ότι το $G$ έχει $k \geq 1$ συνεκτικές συνιστώσες με $n_1, \ldots, n_k$ κορυφές αντίστοιχα. Κάθε συνιστώσα είναι ακυκλική, άρα από το (1) $\Rightarrow$ (2), η συνιστώσα $i$ έχει $n_i - 1$ ακμές, $i = 1, \ldots, k$.

Ο συνολικός αριθμός ακμών στο $G$ είναι

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k$$

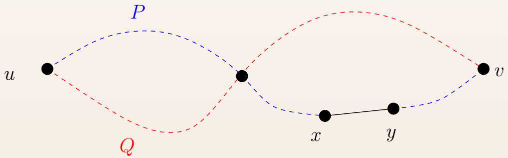
που δείχνει ότι $k = 1$, άρα το $G$ συνεκτικό.

**Παρατήρηση**: Δείξαμε ότι οποιεσδήποτε δύο από τις τρεις ιδιότητες {ακυκλικό, συνεκτικό, $n-1$ ακμές} συνεπάγονται την τρίτη.

# Απόδειξη του Θεωρήματος ΟΔ

(1) $\Rightarrow$ (4): [ακυκλικό & συνεκτικό] $\Rightarrow$ [για κάθε $u, v$ υπάρχει μοναδικό $(u, v)$-μονοπάτι].

Αφού $G$ συνεκτικό, $G$ περιέχει τουλάχιστον ένα $(u, v)$-μονοπάτι. Υπέθεσε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικά τέτοια μονοπάτια $P$ και $Q$. Έστω $e = \{x, y\}$ στο $P$ που δεν ανήκει στο $Q$.




Η παράθεση των $P$ και $Q$ είναι κλειστός περίπατος στον οποίο η $e$ εμφανίζεται ακριβώς μία φορά. Άρα $(P \cup Q) - e$ είναι $(x, y)$-περίπατος χωρίς την $e$. Άρα υπάρχει $(x, y)$-μονοπάτι $R$ χωρίς την $e$· μαζί με την $e$ το $R$ φτιάχνει κύκλο. Άτοπο.

# Απόδειξη του Θεωρήματος ΟΔ

(4) $\Rightarrow$ (1): [Για κάθε $u, v$ υπάρχει μοναδικό $(u, v)$-μονοπάτι] $\Rightarrow$ [ακυκλικό & συνεκτικό]

Αφού για κάθε $u, v$ υπάρχει $(u, v)$-μονοπάτι στο $G$, το $G$ εξ ορισμού είναι συνεκτικό. Αν το $G$ είχε κύκλο $C$ θα περιείχε δύο μονοπάτια ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο κορυφές του $C$. $\square$

## Πόρισμα

1. *Κάθε ακμή ενός δέντρου $T$ είναι γέφυρα.*
2. *Προσθέτοντας μία ακμή σε ένα δέντρο $T$ δημιουργείται ακριβώς ένας κύκλος.*

Απόδειξη του 1. Έστω ακμή $\{u, v\} \in E(T)$. Από το Θεώρημα ΟΔ, η ακμή είναι το μοναδικό $(u, v)$ μονοπάτι στο $T$.

# Απόδειξη του Θεωρήματος ΟΔ

(4) $\Rightarrow$ (1): [Για κάθε $u, v$ υπάρχει μοναδικό $(u, v)$-μονοπάτι] $\Rightarrow$ [ακυκλικό & συνεκτικό]

Αφού για κάθε $u, v$ υπάρχει $(u, v)$-μονοπάτι στο $G$, το $G$ εξ ορισμού είναι συνεκτικό. Αν το $G$ είχε κύκλο $C$ θα περιείχε δύο μονοπάτια ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο κορυφές του $C$. $\square$

## Πόρισμα

1. *Κάθε ακμή ενός δέντρου $T$ είναι γέφυρα.*
2. *Προσθέτοντας μία ακμή σε ένα δέντρο $T$ δημιουργείται ακριβώς ένας κύκλος.*

Απόδειξη του 2. Έστωσαν $u, v \in V(T)$. Υπάρχει μοναδικό $(u, v)$-μονοπάτι στο $T$, άρα η πρόσθεση της ακμής $\{u, v\}$ δημιουργεί ακριβώς έναν κύκλο.

# Δέντρα και γέφυρες

**Πρόταση**

*Ένα συνεκτικό γράφημα $G$ είναι δέντρο αν και μόνο αν κάθε ακμή του $G$ γέφυρα.*

Αποδειξη. $(\Rightarrow)$ Βλ. προηγούμενο πόρισμα.

$(\Leftarrow)$ Θ. δ. ότι $G$ ακυκλικό. Έστω κύκλος $C$ στο $G$ και $e = \{x, y\}$ ακμή του κύκλου. Επειδή $e$ γέφυρα, υπάρχουν κορυφές $a, b$ τ. ώ. στο $G - e$ δεν υπάρχει $(a, b)$-μονοπάτι.

Συνεπώς, στο $G$ οποιοδήποτε $(a, b)$-μονοπάτι $P$ πρέπει να περνάει από την $e$. $G - e$ περιέχει $(x, y)$-μονοπάτι, το $C - e$. $(P - e) \cup (C - e)$ δίνει $(a, b)$-περίπατο στο $G - e$. Άτοπο.

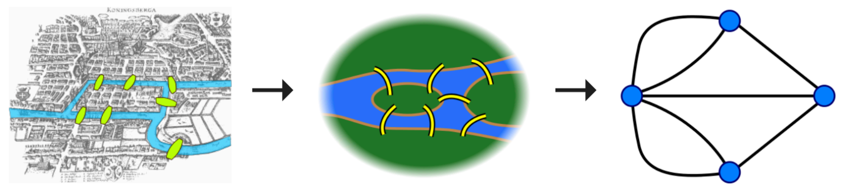
$\square$

# Eulerian γραφήματα

# Οι γέφυρες του Königsberg

Υπάρχει κλειστός περίπατος που περνάει και από τις 7 γέφυρες, μία φορά από την κάθε μία;

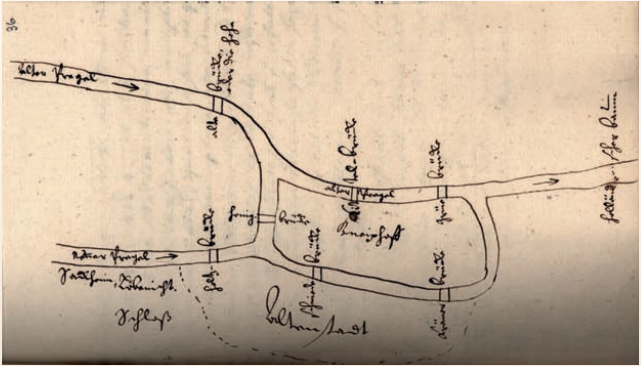
Δοθέντος (πολυ)γραφήματος είναι δυνατό να σχεδιάσουμε έναν κλειστό περίπατο που περνάει από κάθε ακμή ακριβώς μία φορά;



[Σχήμα από Wikipedia]

# Το σημειωματάριο του Euler

Υπάρχει κλειστός περίπατος που περνάει και από τις 7 γέφυρες, μία φορά από την κάθε μία;



# Leonhard Euler (1707-1783)

# Ορισμοί

Μια διαδρομή (trail) είναι ένας περίπατος χωρίς επαναλήψεις ακμών.

Μια Eulerian διαδρομή σε ένα (πολυ)γράφημα $G = (V, E)$ είναι ένας περίπατος που περνάει από κάθε ακμή του $E$ ακριβώς μία φορά.

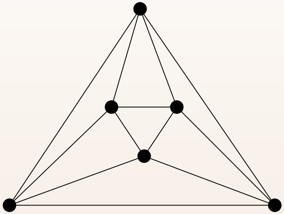
Αν μια Eulerian διαδρομή είναι κλειστή, δηλαδή ξεκινάει και τελειώνει στην ίδια κορυφή, καλείται κύκλος Euler.

Αν το $G$ έχει κύκλο Euler, θα λέμε το $G$ Eulerian.

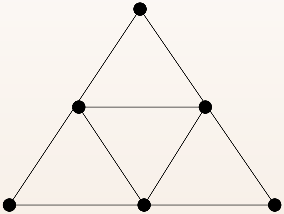
**Θεώρημα (ΘΕ)**

*Ένα συνεκτικό (πολυ)γράφημα έχει κύκλο Euler αν και μόνο αν κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό.*

# Παραδείγματα Eulerian γραφημάτων



$G_1$



$G_2$

# Άρτια γραφήματα

**Λήμμα**

*Κάθε μεγιστική διαδρομή σε ένα άρτιο γράφημα (δηλ. γράφημα όπου όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό) είναι κλειστή διαδρομή.*

Απόδειξη. Έστω $T$ μεγιστική διαδρομή. Αν η $T$ δεν είναι κλειστή, ένας περιττός αριθμός από τις ακμές της προσπίπτει στην καταληκτική κορυφή $v$.

Αφού $d(v)$ άρτιος, υπάρχει ακμή που προσπίπτει στη $v$ η οποία δεν περιέχεται στην $T$. Αυτή η ακμή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επεκτείνουμε την $T$, άρα η $T$ δεν είναι μεγιστική. Άτοπο. $\square$

# Απόδειξη του ΘΕ

Έστω το $G$ έχει κύκλο Euler $C$. Αν ο $C$ επισκέπτεται $k$ φορές τη $v$, κάθε επίσκεψη χρησιμοποιεί δύο ακμές που προσπίπτουν στη $v$ (μία για να φτάσεις και μία για να φύγεις). Άρα $d(v) = 2k$, άρτιος.

Έστω $G$ ένα συνεκτικό άρτιο γράφημα και $T = e_1 e_2 \dots e_l$ (όπου $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$) διαδρομή μέγιστου μήκους στο $G$. Από το Λήμμα η $T$ είναι κλειστή, δηλ., $v_0 = v_l$.

Αν η $T$ δεν περιέχει όλες τις ακμές του $G$, αφού το $G$ είναι συνεκτικό, υπάρχει ακμή $e \notin T$ τ. ώ. $e = \{u, v_i\}$ για κάποια κορυφή $v_i$ στην $T$. Τότε $T' = e e_{i+1} \dots e_l e_1 e_2 \dots e_i$ είναι διαδρομή μήκους μεγαλύτερου της $T$, άτοπο. Άρα η $T$ περιέχει όλες τις ακμές του $G$. $\square$

# (Μη κλειστές) Eulerian διαδρομές

## Πόρισμα

*Ένα συνεκτικό (πολυ)γράφημα $G$ περιέχει Eulerian διαδρομή αν και μόνο αν έχει ακριβώς 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.*

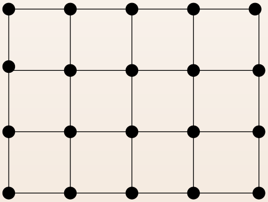
Απόδειξη. Έστω $T$ Eulerian διαδρομή από το $u$ στο $v$. Αν $u = v$, $T$ είναι κύκλος Euler· από το ΘΕ όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό. Αν $u \neq v$, το (πολυ)γράφημα $G \cup e$ όπου $e = \{u, v\}$ καινούργια ακμή έχει κύκλο Euler: τον $T \cup e$. Όλοι οι βαθμοί στο $G \cup e$ πρέπει να είναι άρτιοι. Άρα στο $G$ οι μόνες κορυφές περιττού βαθμού είναι οι $u$ και $v$.

Αν το $G$ έχει 0 κορυφές περιττού βαθμού από το ΘΕ έχει κύκλο Euler. Αν το $G$ έχει ακριβώς 2 κορυφές $u, v$ περιττού βαθμού, στο $G \cup e$, όπου $e = \{u, v\}$ νέα ακμή, όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό. Άρα στο $G \cup e$ περιέχεται κύκλος Euler $C$. Διαγράφοντας την $e$ από το $C$ παίρνουμε Eulerian διαδρομή στο $G$ από τη $u$ στη $v$. □

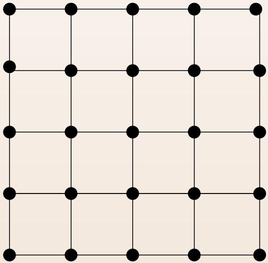
# Χαμιλτονιανά γραφήματα

Ένας κύκλος του $G$ που περιέχει όλες τις κορυφές του $G$ καλείται Hamiltonian κύκλος. Αν το $G$ περιέχει Hamiltonian κύκλο καλείται Hamiltonian.

Σε αντίθεση με τα Eulerian γραφήματα, για τα Hamiltonian δεν διαθέτουμε καλό χαρακτηρισμό. Επιπλέον, το αλγοριθμικό πρόβλημα της ύπαρξης Hamiltonian κύκλου είναι NP-complete.



$G_1$

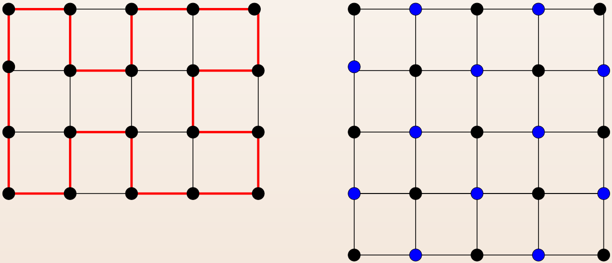


$G_2$

# Χαμιλτονιανά γραφήματα

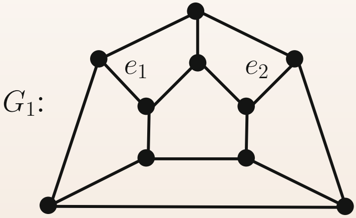
Ένας κύκλος του $G$ που περιέχει όλες τις κορυφές του $G$ καλείται Hamiltonian κύκλος. Αν το $G$ περιέχει Hamiltonian κύκλο καλείται Hamiltonian.

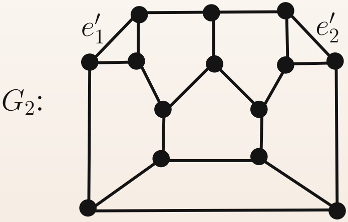
Σε αντίθεση με τα Eulerian γραφήματα, για τα Hamiltonian δεν διαθέτουμε καλό χαρακτηρισμό. Επιπλέον, το αλγοριθμικό πρόβλημα της ύπαρξης Hamiltonian κύκλου NP-complete.



$G_1$ $G_2$

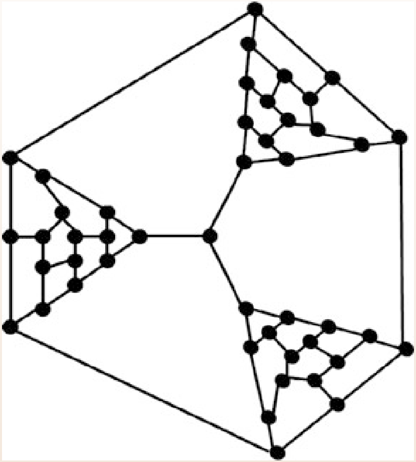
# Άλλα παραδείγματα



# Το γράφημα του Tutte

Είναι το γράφημα του Tutte Χαμιλτονιανό;



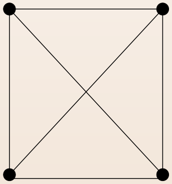
# Επίπεδα γραφήματα

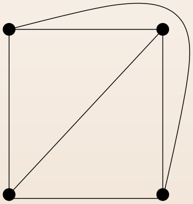
# Ορισμός επίπεδου γραφήματος

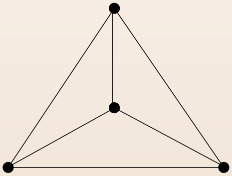
Μια εμβάπτιση (σχεδιασμός) ενός $G$ στο επίπεδο δεν έχει διασταυρώσεις αν οι καμπύλες που αντιστοιχούν στις ακμές δεν τέμνονται (παρά μόνο σε άκρο αν προσπίπτουν σε κοινή κορυφή).

## Ορισμός

Ένα γράφημα $G$ καλείται επίπεδο αν υπάρχει εμβάπτιση χωρίς διασταυρώσεις του $G$ στο επίπεδο.

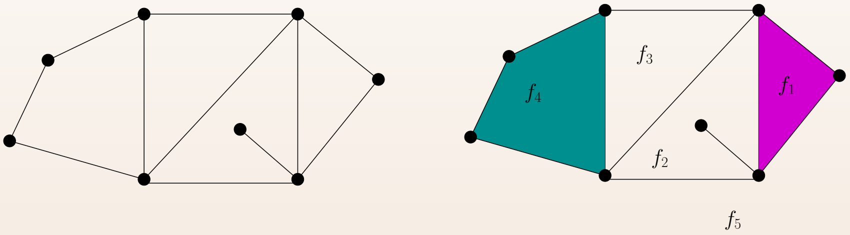






# Όψεις

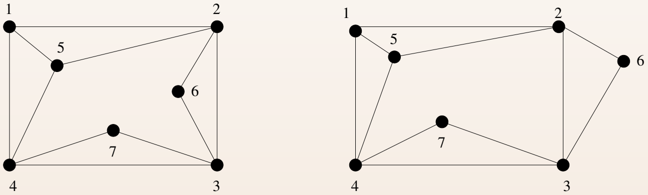
Δίνεται εμβάπτιση χωρίς διασταυρώσεις του $G$. Όψη είναι μια μεγιστική συνεχόμενη περιοχή του επιπέδου χωρίς κομμάτι του γραφήματος.




Το σύνορο μιας όψης είναι ένας κλειστός περίπατος πάνω στις ακμές που αγγίζουν την όψη. Το μήκος αυτού του περιπάτου καλείται βαθμός της όψης.

# Αριθμός όψεων

Αν ορίσουμε την *ταυτότητα* μιας όψης να είναι το σύνορο της, σε διαφορετικές εμβαπτίσεις του ίδιου $G$ μπορεί να δημιουργηθούν όψεις με διαφορετικές ταυτότητες.




Ο **αριθμός $f$ των όψεων** είναι πάντα ο ίδιος. Εξαρτάται μόνο από το $n = |V(G)|$ και $m = |E(G)|$.

# Τύπος του Euler

**Θεώρημα**

*Έστω $G$ συνεκτικό επίπεδο γράφημα με $n$ κορυφές και $m$ ακμές. Σε οποιαδήποτε εμβάπτιση χωρίς διασταυρώσεις του $G$ ο αριθμός $f$ των όψεων ικανοποιεί τη σχέση*

$$n - m + f = 2.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στο $|E(G)|$. Θεωρούμε $|V(G)| = n$.
**Βάση**: Ο ελάχιστος αριθμός ακμών σε ένα συνεκτικό $G$ είναι $m = n - 1$, δηλ. το $G$ δέντρο. Τότε $f = 1$.

**Επαγωγική Υπόθεση**: Έστω ότι όλα τα συνεκτικά γραφήματα με $n$ κορυφές και $m \geq n - 1$ ακμές ικανοποιούν τον τύπο.

**Επαγωγικό Βήμα**: Έστω $G$ επίπεδο γράφημα με $n$ κορυφές και $m + 1 \geq n$ ακμές. Διάλεξε εμβάπτιση χωρίς διασταυρώσεις. Έστω $f$ ο αριθμός των όψεων. Θα αποδείξουμε ότι

$$n - (m + 1) + f = 2.$$

# Τύπος του Euler

**Επαγωγικό Βήμα:** Έστω $G$ επίπεδο γράφημα με $n$ κορυφές και $m+1 \geq n$ ακμές. Διάλεξε εμβάπτιση χωρίς διασταυρώσεις. Έστω $f$ ο αριθμός των όψεων. Θα αποδείξουμε ότι

$$n-(m+1)+f=2.$$

Έστω $e$ ακμή του $G$ που δεν είναι γέφυρα. $G' = G - e$ είναι συνεκτικό. Σβήσε την $e$ από τον σχεδιασμό του $G$ ώστε να πάρουμε εμβάπτιση χωρίς διασταυρώσεις του $G'$.

Το $G'$ έχει $n$ κορυφές, $m$ ακμές και $f' = f - 1$ όψεις. Από την Επαγωγική Υπόθεση στο $G'$ :

$$n-m+f'=2 \Leftrightarrow n-m+f-1=2 \Leftrightarrow n-(m+1)+f=2.$$

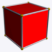
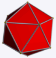
$\square$

# Όψεις κυρτών πολυέδρων

Σε κάθε κυρτό πολύεδρο με $V$ κορυφές, $E$ ακμές και $F$ έδρες

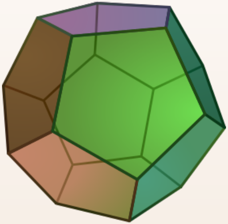
$$V - E + F = 2.$$

Σύμπτωση;

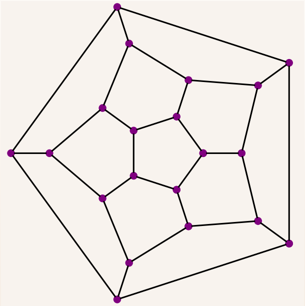
| Name | Image | Vertices $V$ | Edges $E$ | Faces $F$ | Euler characteristic: $V - E + F$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Tetrahedron |  | 4 | 6 | 4 | **2** |
| Hexahedron or cube |  | 8 | 12 | 6 | **2** |
| Octahedron |  | 6 | 12 | 8 | **2** |
| Dodecahedron |  | 20 | 30 | 12 | **2** |
| Icosahedron |  | 12 | 30 | 20 | **2** |

[Πίνακας από Wikipedia]. Βλ. και εδώ

# Αντιστοίχιση του δωδεκάεδρου σε επίπεδο γράφημα



Δωδεκάεδρο (από Wikipedia)

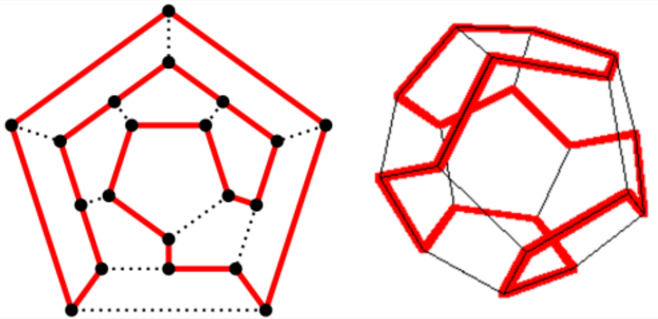


Το αντίστοιχο γράφημα

Το δωδεκάεδρο έχει 20 κορυφές, 30 ακμές και 12 έδρες.
Στο αντίστοιχο επίπεδο γράφημα $n = 20$, $m = 30$, $f = 12$.

# Γράφημα του Δωδεκάεδρου

Το γράφημα του δωδεκάεδρου είναι Χαμιλτονιανό.



# Βαθμοί των όψεων

**Πρόταση**

*Έστω $G$ επίπεδο. Το άθροισμα των βαθμών των όψεων σε μία εμβάπτιση χωρίς διασταυρώσεις του $G$ ισούται με $2|E(G)|$.*

Απόδειξη. Κάθε ακμή $e$ έχει δύο «πλευρές», άρα συνεισφέρει ακριβώς 2 στον βαθμό των όψεων που αγγίζει. Ειδικότερα:

- Αν η $e$ αγγίζει 2 όψεις, συνεισφέρει 1 στον βαθμό της κάθε μίας.
- Αν η $e$ αγγίζει 1 όψη, συνεισφέρει 2 στον βαθμό της.

$\square$

**Γεγονός**

*Σε κάθε επίπεδο γράφημα με τουλάχιστον δύο ακμές, όλες οι όψεις έχουν βαθμό τουλάχιστον 3.*

# Τα επίπεδα γραφήματα είναι αραιά

**Θεώρημα**

*Έστω $G$ επίπεδο γράφημα με τουλάχιστον 2 ακμές. Τότε*

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

Απόδειξη. Χβτγ $G$ είναι συνεκτικό. Διάλεξε εμβάπτιση χωρίς διασταυρώσεις, έστω $f$ το πλήθος των όψεων. Από τον τύπο του Euler

$$f = 2 - |V(G)| + |E(G)|.$$

Έστω $\sigma$ το άθροισμα των βαθμών των όψεων. Ξέρουμε ότι $\sigma = 2|E(G)|$. Κάθε όψη έχει βαθμό τουλάχιστον 3, άρα $3f \leq \sigma$. Επομένως

$$3f \leq 2|E(G)|.$$

Από τον τύπο του Euler

$$3(2 - |V(G)| + |E(G)|) \leq 2|E(G)| \Leftrightarrow |E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

# Επίπεδα διμερή γραφήματα

**Θεώρημα**

*Έστω $G$ επίπεδο διμερές γράφημα με τουλάχιστον 2 ακμές. Τότε*

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4.$$

Απόδειξη. Αφήνεται σαν άσκηση.

# Δύο μη επίπεδα γραφήματα

**Πρόταση**

*Το $K_5$ δεν είναι επίπεδο.*

Απόδειξη. Το $K_5$ έχει 5 κορυφές και 10 ακμές. Αν ήταν επίπεδο, θα έπρεπε

$$10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9.$$

□

**Πρόταση**

*Το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο*

Απόδειξη. Το $K_{3,3}$ είναι διμερές γράφημα με 6 κορυφές και 9 ακμές. Αν ήταν επίπεδο, θα έπρεπε

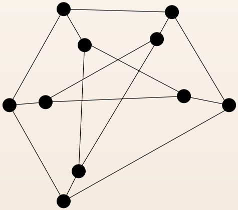
$$9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8.$$

□

# Μη επίπεδα γραφήματα

Η συνθήκη $m \leq 3n - 6$ (για διμερή γραφήματα: $m \leq 2n - 4$) είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή για την επιπεδότητα.

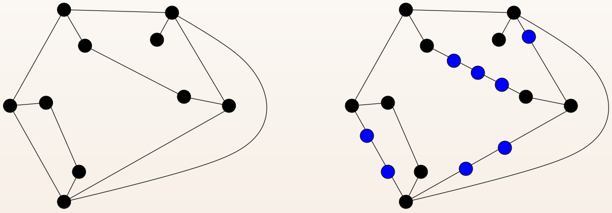
Αν το $G$ την παραβιάζει, δεν είναι επίπεδο. Αν την ικανοποιεί, μπορεί πάλι να μην είναι επίπεδο. Θεωρήστε το γράφημα του Petersen:



Πώς είμαστε σίγουροι ότι δεν υπάρχει τρόπος να το σχεδιάσουμε χωρίς διασταυρώσεις;

# Αναγκαία και ικανή συνθήκη για επιπεδότητα

Μια υποδιαίρεση του $G$ προκύπτει αν αντικαταστήσουμε ακμές με κορυφοδιακεκριμένα μονοπάτια.



$G$ a subdivision of $G$

**Θεώρημα (Kuratowski 1930)**

*Ένα γράφημα $G$ είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει υποδιαίρεση του $K_5$ ή του $K_{3,3}$ ως υπογράφημα.*