Μαθηματικά Πληροφορικής

7ο Μάθημα

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ταιριάσματα (matchings)

Ορισμός (Ταίριασμα)

Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Ταίριασμα καλείται ένα σύνολο $M \subseteq E$, τέτοιο ώστε κάθε κορυφή του V ανήκει το πολύ σε μία ακμή του M. Το μέγεθος του ταιριάσματος είναι το $|M|$.

Ένα ταίριασμα M καλείται ταίριασμα του $U \subseteq V$, αν σε κάθε κορυφή του U προσπίπτει μία ακμή του M. Ταίρι του $u \in U$ καλείται η μοναδική κορυφή $v \in U$ για την οποία $\{u, v\} \in M$. Μια κορυφή χωρίς ταίρι, καλείται αταίριαστη.

Ένα ταίριασμα του V καλείται πλήρες ή τέλειο (perfect matching). Δεν έχουν όλα τα γραφήματα πλήρες ταίριασμα.

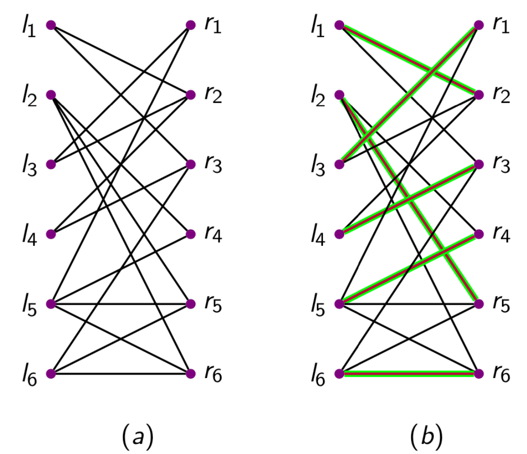
Διμερή Γραφήματα

Ορισμός (Διμερές γράφημα)

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται διμερές αν $V = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, και για κάθε $\{u, v\} \in E$, $u \in A, v \in B$.

Ένα διμερές γράφημα $G = (V, E)$ με διαμέριση $\{A, B\}$ θα το συμβολίζουμε ως $G = (A \cup B, E)$.

Ταιριάσματα σε διμερή γραφήματα



Σχήμα: Διμερές γράφημα (*a*) και ένα πλήρες ταίριασμα (*b*)

Θεώρημα του Hall

Για $S \subseteq V$, συμβολίζουμε με $N(S)$ το σύνολο των γειτόνων του S.

Θεώρημα (Hall)

Ένα διμερές γράφημα $G = (L \cup R, E)$ με ίσο αριθμό κόμβων στα δυο μέρη L και R, περιέχει τέλειο ταίριασμα αν και μόνο αν για κάθε υποσύνολο S του L

$$|S| \leq |N(S)|.$$

Θεώρημα του Hall

Για $S \subseteq V$, συμβολίζουμε με $N(S)$ το σύνολο των γειτόνων του S.

Θεώρημα (Hall)

Ένα διμερές γράφημα $G = (L \cup R, E)$ με ίσο αριθμό κόμβων στα δυο μέρη L και R, περιέχει τέλειο ταίριασμα αν και μόνο αν για κάθε υποσύνολο S του L

$$|S| \leq |N(S)|.$$

Απόδειξη ($\Rightarrow$)

Η συνθήκη του Hall είναι ξεκάθαρα αναγκαία. Αν υπάρχει ταίριασμα M του L, τότε πράγματι για κάθε υποσύνολο S του L

$$|S| \leq |N(S)|.$$

Τα ταίρια των κορυφών του S στο M είναι ακριβώς $|S|$ το πλήθος και ανήκουν στο $N(S)$.

Απόδειξη του Θεωρήματος του Hall ($\Leftarrow$)

Απομένει να δείξουμε ότι η συνθήκη του Hall είναι και ικανή.

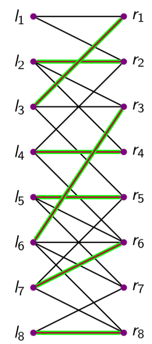
Ορισμός

Έστω M ταίριασμα. M-εναλλασσόμενο μονοπάτι ονομάζεται ένα μονοπάτι P του οποίου οι ακμές ανήκουν εναλλάξ στο $E \setminus M$ και το M. M-αυξητικό μονοπάτι ονομάζεται ένα εναλλασσόμενο μονοπάτι που που ξεκινάει και τελειώνει σε αταίριαστη κορυφή.

Αν υπάρχει M-αυξητικό μονοπάτι P, τότε το σύνολο ακμών $M' = M \oplus E(P) = (M - E(P)) \cup (E(P) - M)$ (i) είναι ταίριασμα και (ii) $|M'| = |M| + 1$.

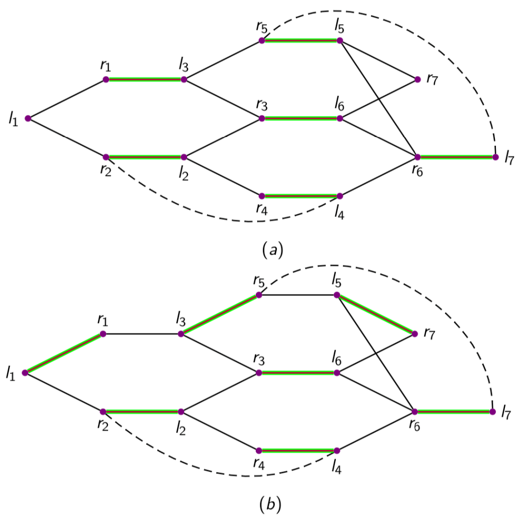
Θα αποδείξουμε κατασκευαστικά πως αν ισχύει η συνθήκη και έχουμε μερικό ταίριασμα του L, μπορούμε πάντα να βρούμε αυξητικό μονοπάτι ξεκινώντας από αταίριαστη κορυφή $u \in L$.

Απόδειξη του Θεωρήματος του Hall ($\Leftarrow$)



Σχήμα: Ένα μερικό ταίριασμα

Απόδειξη του Θεωρήματος του Hall ($\Leftarrow$)



Σχήμα: (a) Ξεδιπλώνουμε το γράφημα από το l_1. (b) Παίρνουμε ένα καλύτερο ταίριασμα εναλλάσοντας τις ακμές στο μονοπάτι $(l_1, r_1, l_3, r_5, l_5, r_7)$.

Απόδειξη του Θεωρήματος του Hall ($\Leftarrow$)

Για $S \subseteq R$,

$$M(S) := \{u \in L \mid \exists v \in S \ \ \{u, v\} \in M\}.$$

Δηλ. $M(S)$ είναι τα ταίρια των κορυφών του S.

- Δίνουμε αλγόριθμο που ξεκινώντας από αταίριαστη κορυφή $u \in L$ ψάχνει για αυξητικό μονοπάτι.
- Ο αλγόριθμος επισκέπτεται τις κορυφές ανά «επίπεδα» όπου διαδοχικά επίπεδα αντιστοιχούν σε διαφορετικές μεριές του G, δηλ. στο L και στο R.

$$L_0, R_1, L_1, R_2, L_2, \ldots$$

- Αρχικά $L_0 = \{u\}$ και $R_1 = N(L_0)$. Μετά $L_1 = M(R_1)$, $R_2 = N(L_2)$ κοκ.

Αλγόριθμος για αυξητικό μονοπάτι

1 $L_0 := \{u\}$ // $u \notin M(R)$, δηλαδή αταίριαστη
2 $R_1 := N(L_0)$
3 SeenL $:= L_0$ SeenR $:= R_1$
4 $i := 1$
5 **while** (*όλες οι κορυφές του* R_i *ταιριασμένες* **and** $R_i \neq \varnothing$) **do**
6 $L_i := M(R_i)$
7 $R_{i+1} := N(L_i) \setminus$ SeenR
8 SeenL $:=$ SeenL $\cup L_i$
9 SeenR $:=$ SeenR $\cup R_{i+1}$
10 $i := i + 1$
11 **end**
12 **if** *υπάρχει αταίριαστη κορυφή στο* R_i **then**
13 **return** «βρέθηκε αυξητικό μονοπάτι»
14 **end**

Αλγόριθμος για αυξητικό μονοπάτι

Από τη Γραμμή 6 του Αλγορίθμου,

$$\forall i, \quad |R_i| = |L_i|. \tag{1}$$

Αν το while-loop τερματίσει και δεν έχουμε βρει αυξητικό μονοπάτι, το «τελευταίο» $R_{i+1} = \varnothing$ και το «ξεδίπλωμα» του γραφήματος σταματάει σε κορυφές του L.

Άρα

$$|\text{SeenR}| = \sum_{i=1} |R_i| \stackrel{(1)}{=} \sum_{i=1} |L_i| = |\text{SeenL}| - 1$$

γιατί SeenL $= \{u\} \cup \left(\bigcup_{i=1} L_i\right)$.

Εκ κατασκευής SeenR $= N($SeenL$)$. Από συνθήκη Hall, θα έπρεπε $|$SeenR$| \geq |$SeenL$|$, άτοπο.

Θεώρημα του Hall

Στην πραγματικότητα αποδείξαμε κάτι πιο γενικό:

Θεώρημα (Hall)

Ένα διμερές γράφημα $G = (L \cup R, E)$ περιέχει ταίριασμα του L αν και μόνο αν για κάθε υποσύνολο S του L

$$|S| \leq |N(S)|.$$

Πόρισμα του Θεωρήματος του Hall

Πόρισμα (Πόρισμα του Θ. του Hall)

Αν σε διμερές $G = (L \cup R, E)$ για κάθε $S \subseteq L$, $|S| - d \leq |N(S)|$, για κάποιο $d \in \{0, 1, \ldots, |L|\}$, τότε το G περιέχει ταίριασμα μεγέθους $|L| - d$.

Απόδειξη.

Κατασκευάζουμε G' όπου στη μεριά του R προσθέτουμε d καινούργιες κορυφές, η κάθε μία συνδέεται με ακμή με όλες τις κορυφές του L. Στο G', $\forall S \subseteq L$, $|S| \leq |N(S)|$, άρα υπάρχει ταίριασμα M του L.

Το πολύ d από τις $|L|$ το πλήθος ακμές του M προσπίπτουν στις νέες κορυφές. Άρα, τουλάχιστον $|L| - d$ από τις ακμές του M είναι ακμές του G. □