Μαθηματικά Πληροφορικής

8ο Μάθημα

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σχέσεις

Ορισμός

Έστω σύνολα A, B. (Διμελής) σχέση ονομάζεται ένα σύνολο $R \subseteq A \times B$.

Η έννοια της σχέσης γενικεύει την έννοια της συνάρτησης με πεδίο ορισμού το A και σύνολο αφίξεως το B.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$A = B = \{$σύνολο των ενεργών φοιτητών του di$\}$.

$$R = \{(x, y) \mid x \text{ συμπαθεί } y\}.$$

Συμβολισμός: συχνά xRy ή $x \sim y$ αντί $(x, y) \in R$.

Ιδιότητες Σχέσεων

Μια διμελής σχέση R πάνω σε ένα σύνολο $\mathcal{X}$ καλείται

1. ανακλαστική αν $\forall a \in \mathcal{X}$, aRa.
2. συμμετρική αν $\forall a, b \in \mathcal{X}$, aRb συνεπάγεται bRa.
3. αντισυμμετρική αν $\forall a, b \in \mathcal{X}$, aRb και bRa, συνεπάγεται ότι $a = b$.
4. μεταβατική αν $\forall a, b, c \in \mathcal{X}$, aRb και bRc, συνεπάγεται ότι aRc.

Παράδειγμα: έστω $\mathcal{X} = \mathbb{Z}$. Όρισε $x \sim y$ αν $x \mid y$.
Παράδειγμα: έστω $\mathcal{X} = 2^{\mathbb{Z}}$. Όρισε $A \sim B$ αν $A \cap B = \varnothing$.

Σχέσεις Ισοδυναμίας

Μια διμελής σχέση R πάνω σε ένα σύνολο $\mathcal{X}$ καλείται σχέση ισοδυναμίας αν η R είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική, δηλαδή:

1. $\forall a \in \mathcal{X}$, aRa.
2. $\forall a, b \in \mathcal{X}$, aRb συνεπάγεται bRa.
3. $\forall a, b, c \in \mathcal{X}$, aRb και bRc, συνεπάγεται ότι aRc.

Παράδειγμα: έστω $\mathcal{X} = \mathbb{Z}$. Όρισε xRy αν $x \equiv y \pmod 5$.
Αντιπαράδειγμα: η σχέση «συμπαθεί» δεν είναι σχέση ισοδυναμίας!
Αντιπαράδειγμα: $x \mid y$, $x, y \in \mathbb{N}$.

Κλάσεις Ισοδυναμίας

Ορισμός

Έστω $R \subseteq A \times A$ μια σχέση ισοδυναμίας. Κλάση ισοδυναμίας ενός $x \in A$ ορίζεται ως το σύνολο $[x] := \{y \in A \mid xRy\}$.

Κλάσεις Ισοδυναμίας

Ορισμός

Έστω $R \subseteq A \times A$ μια σχέση ισοδυναμίας. Κλάση ισοδυναμίας ενός $x \in A$ ορίζεται ως το σύνολο $[x] := \{y \in A \mid xRy\}$.

για τη σχέση $x \equiv y \pmod 5$

$$[7] = \{\ldots, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \ldots\}.$$

Παρατηρείστε $[7] = [12] = [22]$ κοκ.

Κλάσεις Ισοδυναμίας

Ορισμός

Έστω $R \subseteq A \times A$ μια σχέση ισοδυναμίας. Κλάση ισοδυναμίας ενός $x \in A$ ορίζεται ως το σύνολο $[x] := \{y \in A \mid xRy\}$.

Θεώρημα

Οι κλάσεις ισοδυναμίας μιας σχέσης R πάνω στο σύνολο A ορίζουν μια διαμέριση του A.

Κλάσεις Ισοδυναμίας

Ορισμός

Έστω $R \subseteq A \times A$ μια σχέση ισοδυναμίας. Κλάση ισοδυναμίας ενός $x \in A$ ορίζεται ως το σύνολο $[x] := \{y \in A \mid xRy\}$.

Θεώρημα

Οι κλάσεις ισοδυναμίας μιας σχέσης R πάνω στο σύνολο A ορίζουν μια διαμέριση του A.

Οι πέντε κλάσεις της σχέσης $x \equiv y \pmod 5$ διαμερίζουν το $\mathbb{Z}$:

$$\{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \ldots\}$$
$$\{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \ldots\}$$
$$\{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, 23, \ldots\}$$
$$\{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, 24, \ldots\}$$
$$\{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, \ldots\}$$

Παράδειγμα

Δίνεται γράφημα $G = (V, E)$. Ορίστε στο V τη σχέση $\sim$:

$x \sim y$ αν υπάρχει στον G μονοπάτι από το x στο y.

Είναι η σχέση $\sim$ σχέση ισοδυναμίας; Αν ναι, ποιες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας;

Σχέσεις Μερικής Διάταξης

Μια διμελής σχέση '$\preceq$' πάνω σε ένα σύνολο $\mathcal{X}$ καλείται μερική διάταξη αν η '$\preceq$' είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική, δηλαδή:

1. $\forall a \in \mathcal{X}$, $a \preceq a$.
2. $\forall a, b \in \mathcal{X}$, $a \preceq b$ και $b \preceq a$, συνεπάγεται ότι $a = b$.
3. $\forall a, b, c \in \mathcal{X}$, $a \preceq b$ και $b \preceq c$, συνεπάγεται ότι $a \preceq c$.

Παράδειγμα: $\mathcal{X} = \mathbb{N}$ και $a \preceq b$ αν $a \mid b$.
Παράδειγμα: $\mathcal{X} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ και $(p_1, q_1) \preceq (p_2, q_2)$ αν $p_1 < p_2$ ή $[p_1 = p_2$ και $q_1 \leq q_2]$ (λεξικογραφική διάταξη).
Παράδειγμα: έστω $\mathcal{X} = 2^{\mathbb{N}}$ και '$\preceq$' $= \subseteq$.
Αντιπαράδειγμα: $\mathcal{X} =$ σύνολο άπειρων ακολουθιών πραγματικών αριθμών και $a \preceq b$ ανν a υπακολουθία της b.

Έστω $(\mathcal{X}, \preceq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Δυο στοιχεία $x, y \in \mathcal{X}$ καλούνται **συγκρίσιμα** αν $x \preceq y$, ή $y \preceq x$.

Αν $x \preceq y$ και $x \neq y$ γράφουμε $x \prec y$.

Σύνολο $X \subseteq \mathcal{X}$ καλείται **αλυσίδα** αν οποιαδήποτε δύο στοιχεία του X είναι συγκρίσιμα. **Προσοχή:** αν $x, y \in X$, $z \in \mathcal{X}$, και $x \prec z \prec y$ δεν έπεται υποχρεωτικά ότι $z \in X$.

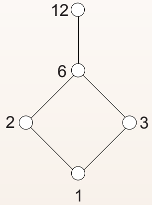
Ισοδύναμα, αλυσίδα είναι ένα σύνολο $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, $k \geq 1$, τ. ώ.

$$x_{i_1} \prec x_{i_2} \prec \ldots \prec x_{i_k}.$$

Σύνολο $X \subseteq \mathcal{X}$ καλείται **αντιαλυσίδα** αν οποιαδήποτε δύο **διακεκριμένα** στοιχεία του X δεν είναι συγκρίσιμα.

Γραφική αναπαράσταση διατεταγμένων συνόλων

Σχέση διαιρετότητας στο $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 6, 12\}$:

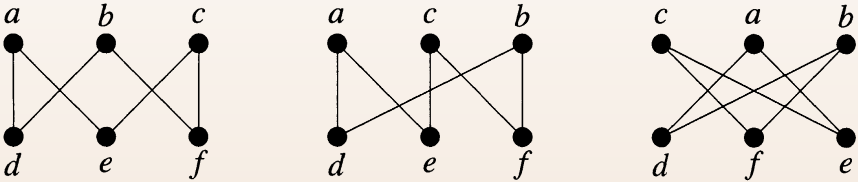


Διάγραμμα Hasse:

- Γράφημα σχεδιασμένο στο επίπεδο με κορυφές τα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{X}$.
- Κορυφές που συνδέονται μέσω της $\preceq$ συνδέονται με ακμή, παραλείπονται όλες οι ακμές που συνάγονται από τη μεταβατικότητα.
- Αν $v \preceq w$, η κορυφή v σχεδιάζεται χαμηλότερα από την κορυφή w.

Γραφική αναπαράσταση διατεταγμένων συνόλων

Παραδείγματα τριών διαφορετικών έγκυρων διαγραμμάτων Hasse για το ίδιο διατεταγμένο σύνολο.

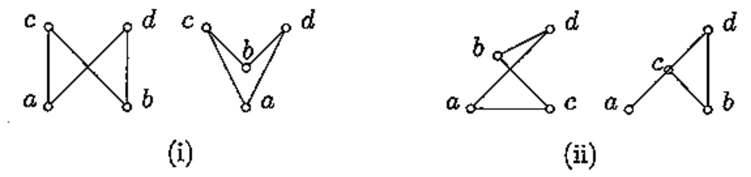


$x \preceq y$ αν υπάρχει μονότονο μονοπάτι από το x στο y, δηλ. μονοπάτι που μόνο ανεβαίνει.

Γραφική αναπαράσταση διατεταγμένων συνόλων

Διατεταγμένο σύνολο $P = \{a, b, c, d\}$ που ορίζεται από τις σχέσεις $a \prec c$, $a \prec d$, $b \prec c$, $b \prec d$.

Στο Σχήμα (i) δύο ορθές αναπαραστάσεις του με διαγράμματα Hasse, στο Σχήμα (ii) λανθασμένες.



Ολική διάταξη

Ορισμός

Έστω $(P, \preceq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Η σχέση $\preceq$ καλείται ολική διάταξη αν

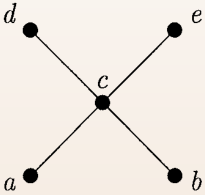
$$\forall x, y \in P, \quad x \preceq y \text{ ή } y \preceq x.$$

Το διάγραμμα Hasse μιας ολικής διάταξης είναι πάντα μονοπάτι.

Ελαχιστικά στοιχεία

Ορισμός

Έστω $(P, \preceq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Το στοιχείο $z \in P$ καλείται ελαχιστικό (minimal) αν δεν υπάρχει $x \in P$ τ. ώ. $x \prec z$.

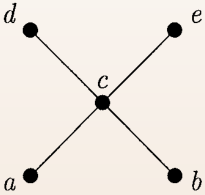


Το $z \in P$ καλείται ελάχιστο (minimum) αν $\forall x \in P$, $z \preceq x$. Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο δεν έχει απαραίτητα ελάχιστο στοιχείο.

Μεγιστικά στοιχεία

Ορισμός

Έστω $(P, \preceq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Το στοιχείο $z \in P$ καλείται μεγιστικό (maximal) αν δεν υπάρχει $x \in P$ τ. ώ. $z \prec x$.



Το $z \in P$ καλείται μέγιστο (maximum) αν $\forall x \in P$, $x \preceq z$. Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο δεν έχει απαραίτητα μέγιστο στοιχείο.

Ακόμα κι αν το P περιέχει ένα μοναδικό ελαχιστικό στοιχείο, μπορεί να μην περιέχει ελάχιστο! Γιατί; Δώστε αντιπαράδειγμα.

Ομοίως για τα μεγιστικά.

Ύπαρξη ελαχιστικού (ή μεγιστικού) στοιχείου

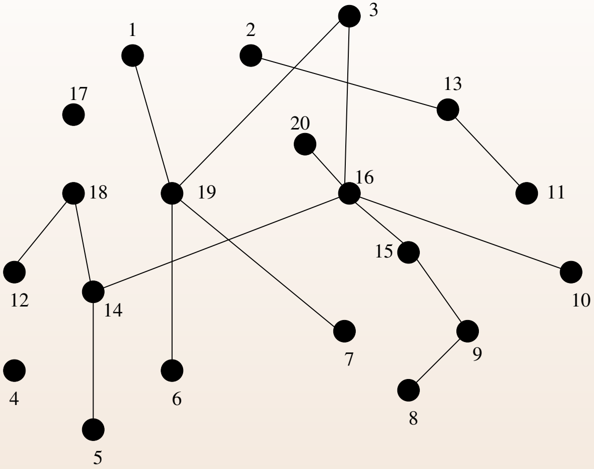
Πρόταση

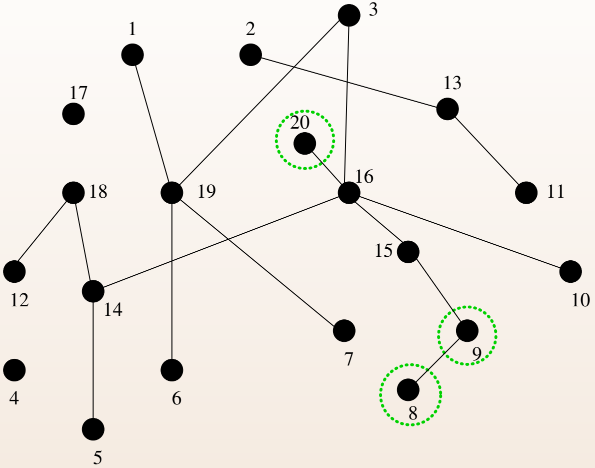
Έστω $(P, \preceq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο, όπου P πεπερασμένο. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα ελαχιστικό στοιχείο.

Απόδειξη.

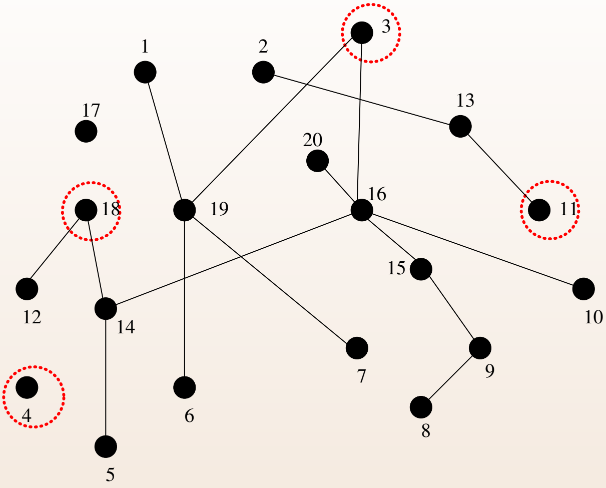
Διάλεξε $x \in P$ τέτοιο ώστε $L_x = \{y \in P \mid y \preceq x\}$ έχει το ελάχιστο πλήθος στοιχείων. Αν $|L_x| = 1$, τότε το $L_x = \{x\}$, άρα x ελαχιστικό. Αν $|L_x| > 1$, διάλεξε $y \in L_x$, $y \neq x$. Από μεταβατικότητα $L_y \subseteq L_x$, και επειδή $x \notin L_y$, $L_y \subset L_x$. Δηλαδή $|L_y| < |L_x|$, άτοπο. □

Η πρόταση δεν ισχύει για άπειροσύνολα. Δώστε αντιπαράδειγμα.


3
1
2
13
17
20
16
18
19
11
15
12
14
10
7
9
4
6
8
5



Το σύνολο $\{8, 9, 20\}$ είναι αλυσίδα. Ομοίως και το σύνολο $\{8, 20\}$.

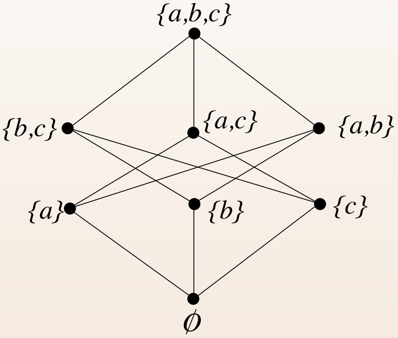


Το σύνολο $\{4, 18, 3, 11\}$ είναι αντιαλυσίδα. Ομοίως και το σύνολο $\{3\}$.

Το Θεώρημα του Dilworth

Αποσύνθεση ενός διατεταγμένου σύνολου P καλείται μια διαμέριση του σε αμοιβαία ξένες αλυσίδες.

$c(P) :=$ ελάχιστος αριθμός αλυσίδων σε μια αποσύνθεση του P.



Τετριμμένα στο παράδειγμα $c(P) \leq 8$. Τελικά $c(P) = 3$.

$r(P) :=$ μέγιστο μέγεθος αντιαλυσίδας στο P.
Υπάρχει σχέση ανάμεσα στο $c(P)$ και το $r(P)$;

Παρατήρηση

Σε κάθε πεπερασμένο διατεταγμένο σύνολο P, $r(P) \leq c(P)$.

Δοσμένης μια συλλογής από αλυσίδες, μια αντιαλυσίδα μπορεί να περιέχει μόνο ένα στοιχείο από κάθε αλυσίδα της συλλογής.

Παρατήρηση

Το σύνολο M των μεγιστικών στοιχείων αποτελεί αντιαλυσίδα.
Δεν ισχύει γενικά ότι το M αποτελεί αντιαλυσίδα μέγιστου μεγέθους. Ομοίως και για το σύνολο των ελαχιστικών στοιχείων.

$r(P) :=$ μέγιστο μέγεθος αντιαλυσίδας στο P.
Υπάρχει σχέση ανάμεσα στο $c(P)$ και το $r(P)$;

Παρατήρηση

Σε κάθε πεπερασμένο διατεταγμένο σύνολο P, $r(P) \leq c(P)$.

Δοσμένης μια συλλογής από αλυσίδες, μια αντιαλυσίδα μπορεί να περιέχει μόνο ένα στοιχείο από κάθε αλυσίδα της συλλογής.

Θεώρημα (Dilworth, 1950)

Σε κάθε πεπερασμένο διατεταγμένο σύνολο P, $c(P) \leq r(P)$.

Πόρισμα

Σε κάθε πεπερασμένο διατεταγμένο σύνολο P, $c(P) = r(P)$.

Απόδειξη του Θεωρήματος του Dilworth

Με επαγωγή στο $|P|$. Έστω a ένα μεγιστικό στοιχείο του P και $P' = P - \{a\}$.

Από Ε.Υ., P' ένωση n ξένων αλυσίδων $C_1, \ldots, C_n$ και $c(P') = r(P') = n$. Γνωρίζουμε ότι:

$$c(P') = n \Rightarrow c(P) \leq n + 1 \quad (1)$$
$$r(P') = n \Rightarrow n \leq r(P) \quad (2)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το P είτε (i) περιέχει μια αντιαλυσίδα μεγέθους $n+1$ είτε (ii) είναι ένωση το πολύ n αλυσίδων.

$[(i), 1] \Rightarrow c(P) \leq n + 1 \leq r(P)$.
$[(ii), (2)] \Rightarrow c(P) \leq n \leq r(P)$.

Απόδειξη του Θεωρήματος του Dilworth

Με επαγωγή στο $|P|$. Έστω a ένα μεγιστικό στοιχείο του P και $n = r(P')$, όπου $P' = P - \{a\}$.

Από Ε.Υ., P' ένωση n ξένων αλυσίδων $C_1, \ldots, C_n$. Θα δείξουμε ότι το P είτε περιέχει μια αντιαλυσίδα μεγέθους $n+1$ είτε είναι ένωση το πολύ n αλυσίδων.

Κάθε αντιαλυσίδα μεγέθους n στο P' περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε C_i. Έστω a_i το μεγιστικό στοιχείο της C_i που ανήκει σε κάποια αντιαλυσίδα μεγέθους n του P'. ΛΗΜΜΑ: το $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ είναι αντιαλυσίδα.

Απόδειξη του ΛΗΜΜΑΤΟΣ

Μία αντιαλυσίδα δεν μπορεί να περιέχει πάνω από ένα στοιχείο από την ίδια αλυσίδα. Επομένως μία αντιαλυσίδα μεγέθους n στο P' πρέπει να περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε αλυσίδα C_i, $i = 1, \ldots, n$.

Έστω ότι το Λήμμα δεν ισχύει και υπάρχουν a_i, a_j, $i \neq j$, τέτοια ώστε $a_i \prec a_j$. Εξ ορισμού το a_j ανήκει σε κάποια αντιαλυσίδα X μεγέθους n και η X πρέπει να περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο a_i' από τη C_i. Τότε πρέπει $a_i \prec a_i'$, άρα το a_i δεν είναι το μεγιστικό στοιχείο της C_i που ανήκει σε αντιαλυσίδα μεγέθους n. Άτοπο.

Απόδειξη του Θεωρήματος του Dilworth

Με επαγωγή στο $|P|$. Έστω a ένα μεγιστικό στοιχείο του P και $n = r(P')$, όπου $P' = P - \{a\}$.

Από Ε.Υ., P' ένωση n ξένων αλυσίδων $C_1, \ldots, C_n$. Θα δείξουμε ότι το P είτε περιέχει μια αντιαλυσίδα μεγέθους $n+1$ είτε είναι ένωση το πολύ n αλυσίδων.

Κάθε αντιαλυσίδα μεγέθους n στο P' περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε C_i. Έστω a_i το μεγιστικό στοιχείο της C_i που ανήκει σε κάποια αντιαλυσίδα μεγέθους n του P'. ΛΗΜΜΑ: το $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ είναι αντιαλυσίδα.

Αν $A \cup \{a\}$ αντιαλυσίδα στο P, τελειώσαμε.

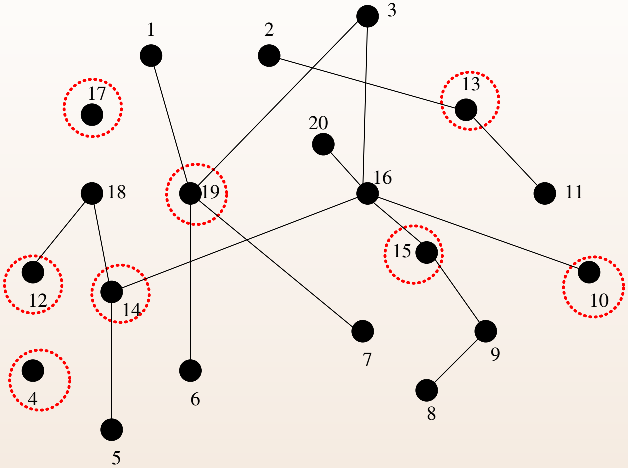
Απόδειξη του Θεωρήματος του Dilworth

Με επαγωγή στο $|P|$. Έστω a ένα μεγιστικό στοιχείο του P και $n = r(P')$, όπου $P' = P - \{a\}$.

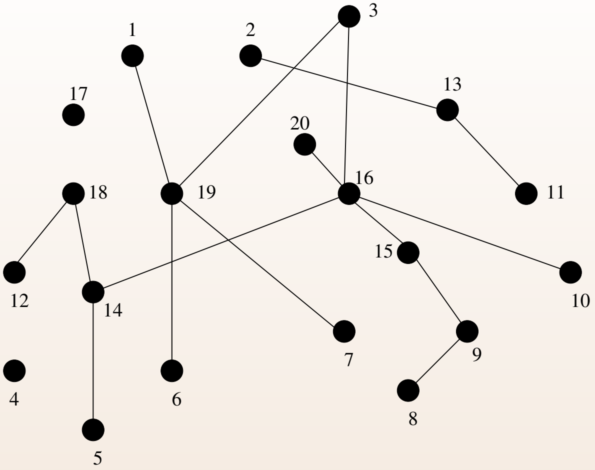
Από Ε.Υ., P' ένωση n ξένων αλυσίδων $C_1, \ldots, C_n$. Θα δείξουμε ότι το P είτε περιέχει μια αντιαλυσίδα μεγέθους $n+1$ είτε είναι ένωση το πολύ n αλυσίδων.

Κάθε αντιαλυσίδα μεγέθους n στο P' περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε C_i. Έστω a_i το μεγιστικό στοιχείο της C_i που ανήκει σε κάποια αντιαλυσίδα μεγέθους n του P'. ΛΗΜΜΑ: το $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ είναι αντιαλυσίδα.

Αν $A \cup \{a\}$ αντιαλυσίδα στο P, τελειώσαμε. Ειδάλλως $a_i \prec a$ για κάποιο i. Τότε $K = \{a\} \cup \{x \in C_i : x \preceq a_i\}$ αλυσίδα στο P, και δεν υπάρχουν αντιαλυσίδες n στοιχείων στο $P - K$, (*αφού a_i το μεγιστικό στοιχείο του C_i που συμμετέχει σε τέτοια αντιαλυσίδα*), άρα από Ε.Υ. το $P - K$ είναι ένωση το πολύ $n-1$ αλυσίδων. Δηλ. το P είναι ένωση το πολύ n αλυσίδων.

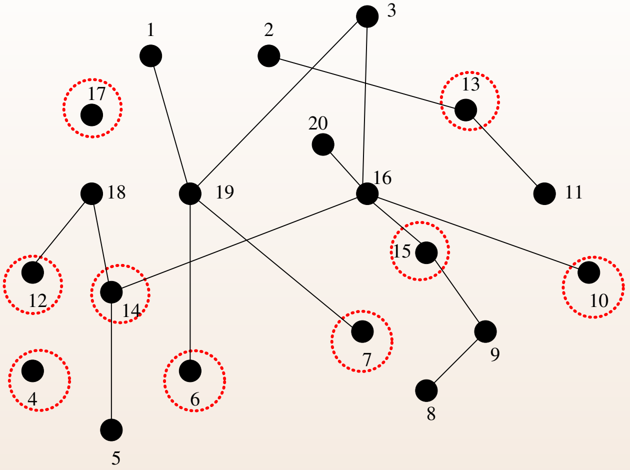


Το σύνολο $\{4, 12, 14, 17, 19, 15, 13, 10\}$ είναι αντιαλυσίδα μεγέθους 8. Είναι μέγιστη αντιαλυσίδα;



Υπάρχει αποσύνθεση σε 8 αλυσίδες; Η αποσύνθεση που ακολουθεί έχει μέγεθος 9.

$\{4\}, \{12\}, \{5, 14, 18\}, \{17\}, \{6, 3\}, \{7, 19, 1\}, \{8, 9, 15, 16\}, \{10, 20\}, \{2, 13, 11\}$.



Το σύνολο $\{4, 12, 14, 17, 6, 7, 15, 13, 10\}$ είναι αντιαλυσίδα μεγέθους 9. Επομένως είναι μέγιστη αντιαλυσίδα και η αποσύνθεση της προηγούμενης διαφάνειας είναι ελάχιστη.

Παρατηρήσεις στο Θεώρημα του Dilworth

Παρατήρηση

Αποδείξαμε το θεώρημα για οποιοδήποτε πεπερασμένο διατεταγμένο σύνολο P, όχι μόνο για τη δομή $(2^S, \subseteq)$.

Παρατήρηση

Γνωστά θεωρήματα, όπως το Θεώρημα του Hall, προκύπτουν ως πορίσματα του Θεωρήματος του Dilworth.

Ακολουθούν δύο τέτοια παραδείγματα με θεωρήματα που έχουμε κάνει στο μάθημα.

Θεώρημα (Hall και άλλοι, 1917-1935)

Ένα διμερές γράφημα $G = (L \cup R, E)$ περιέχει ταίριασμα του L αν για κάθε υποσύνολο S του L

$$|S| \leq |\Gamma(S)|.$$

Αποδειξη: Έστω $P = L \cup R$. Ορίζουμε σχέση μερικής διάταξης:

για $x \in R, y_i \in L, \quad x \prec y_i$, αν $x \in \Gamma(\{y_i\})$.

Το R είναι αντιαλυσίδα του P (εύκολο) με μέγιστο μεγέθος:

Αν η μέγιστη αντιαλυσίδα είναι της μορφής

$$R' \cup L' \text{ όπου } R' \subseteq R, L' \subseteq L, L' \neq \varnothing$$

παρατηρήστε ότι πρέπει (γιατί;)

$$R \setminus R' \neq \varnothing \text{ και } \Gamma(L') = R \setminus R'.$$

Από τη συνθήκη του Hall, παίρνουμε $|R| \geq |R' \cup L'|$.

Θεώρημα (Hall και άλλοι, 1917-1935)

Ένα διμερές γράφημα $G = (L \cup R, E)$ περιέχει ταίριασμα του L αν για κάθε υποσύνολο S του L

$$|S| \leq |\Gamma(S)|.$$

Απόδειξη: Έστω $P = L \cup R$. Ορίζουμε σχέση μερικής διάταξης:

$$\text{για } x \in R, y_i \in L, \quad x \prec y_i, \text{ αν } x \in \Gamma(\{y_i\}).$$

Το R είναι αντιαλυσίδα του P με μέγιστο μεγέθος.

Από Θ. Dilworth, υπάρχει αποσύνθεση $\mathcal{C}$ του P σε $|R|$ ξένες αλυσίδες. Κάθε μία από τις αλυσίδες της $\mathcal{C}$ πρέπει να περιέχει ένα στοιχείο του R. Άρα οι $|L|$ αλυσίδες που καλύπτουν το L είναι της μορφής $\{x_i, y_i\}$, $x_i \in \Gamma(\{y_i\})$, $i = 1, \ldots, m$.

Οι αντίστοιχες ακμές είναι το ταίριασμα του L.

Έχουμε αποδείξει στην τάξη το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα (Erdős-Szekeres, 1935)

Έστω $A = (a_1, \ldots, a_{n^2+1})$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η A περιέχει αύξουσα υπακολουθία με $n+1$ όρους ή φθίνουσα υπακολουθία με $n+1$ όρους.

Θα δείξουμε πως το Θεώρημα Erdős-Szekeres είναι επίσης πόρισμα του Θεωρήματος του Dilworth.

Θεώρημα (Erdős-Szekeres, 1935)

Έστω $A = (a_1, \ldots, a_{n^2+1})$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η A περιέχει αύξουσα υπακολουθία με $n+1$ όρους ή φθίνουσα υπακολουθία με $n+1$ όρους.

Απόδειξη: Όρισε μερική διάταξη $\preceq$ στο A :

$$a_i \preceq a_j, \text{ αν } a_i \leq a_j \text{ και } i \leq j.$$

Οι *αλυσίδες* αντιστοιχούν σε αύξουσες υπακολουθίες και οι *αντιαλυσίδες* σε γνησίως φθίνουσες υπακολουθίες (γιατί;).

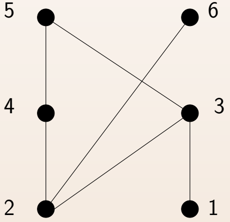
Αν υπάρχει αποσύνθεση του A σε το πολύ n αλυσίδες, από Α. τ. Π. μία αλυσίδα περιέχει τουλάχιστον $\lceil (n^2+1)/n \rceil = n+1$ στοιχεία.

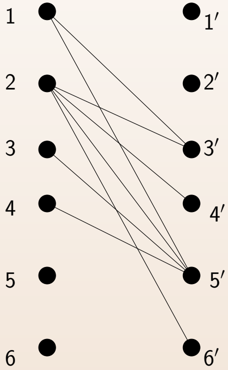
Αν κάθε αποσύνθεση του A απαιτεί τουλάχιστον $n+1$ αλυσίδες, από Θ. Dilworth υπάρχει αντιαλυσίδα μεγέθους τουλάχιστον $n+1$.

Αλγόριθμος για την εύρεση ελάχιστης αποσύνθεσης σε αλυσίδες

Υπολογισμός ελάχιστης αποσύνθεσης

$(P, \preceq)$ μερικά διατεταγμένο σύνολο, $P = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Φτιάξε διμερές γράφημα $G = (P \cup P', E)$ όπου
$P' = \{1', 2', \ldots, n'\}$ αντίγραφο του P. Η ακμή ij' ανήκει στο E αν και μόνο αν $i \prec j$.





Υπολογισμός ελάχιστης αποσύνθεσης

Λήμμα

Για κάθε ταίριασμα M στο G υπάρχει αποσύνθεση D_M έ. ώ. $|M| + |D_M| = n$.

Αν $M = \{i_1 j_1', i_2 j_2', \ldots, i_k j_k'\}$ έχουμε ότι $i_1 \prec j_1, i_2 \prec j_2, \ldots, i_k \prec j_k$.

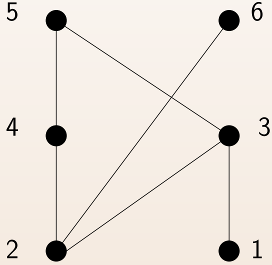
Με άπληστο τρόπο συνένωσε τα ταιριασμένα στοιχεία σε αλυσίδες. Αν $i_x j_y'$, $j_y j_z' \in M$, τότε οι i_x, j_y, j_z φτιάχνουν αλυσίδα κοκ.

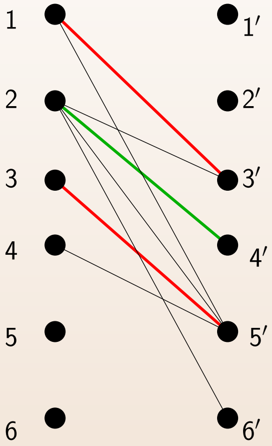
Αταίριαστες κορυφές $i \in P$ προστίθενται στην D_M ως μονομελείς αλυσίδες.

Παράδειγμα ταιριάσματος

Ταίριασμα $M = \{13', 24', 35'\}$.

- Μπορούμε να «συνενώσουμε» τις δύο κόκκινες ακμές λόγω των κορυφών 3 και $3'$.

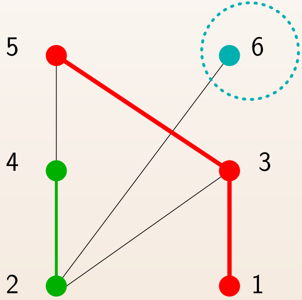


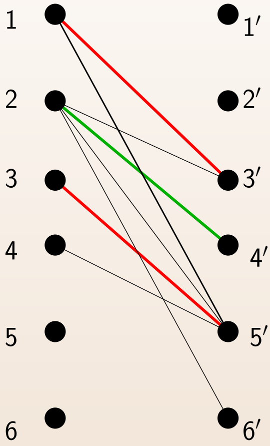


Από το ταίριασμα στην αποσύνθεση

Ταίριασμα $M = \{13', 24', 35'\}$. Τρεις αλυσίδες στην D_M.

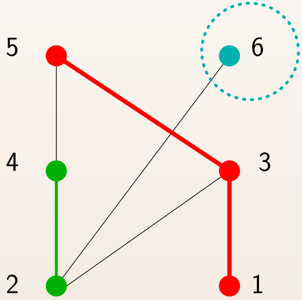
- Μπορούμε να «συνενώσουμε» τις δύο κόκκινες ακμές λόγω των κορυφών 3 και $3'$.

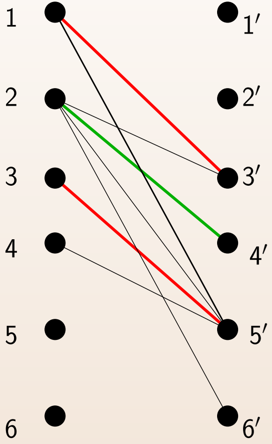




Από το ταίριασμα στην αποσύνθεση

Ταίριασμα $M = \{13', 24', 35'\}$.
Αποσύνθεση $D_M = \{\ \{1,3,5\},\ \{2,4\},\ \{6\}\ \}$.





Συνέχεια της απόδειξης

Λήμμα

Για κάθε ταίριασμα M στο G υπάρχει αποσύνθεση D_M έ. ώ. $|M| + |D_M| = n$.

Από τις συνενώσεις προκύπτει η αποσύνθεση $D_M = \{C_1, \ldots, C_r\}$.

$$n = \sum_{j=1}^{r} |C_j| = \sum_{j=1}^{r} (|C_j| - 1) + |D_M|.$$

- Κάθε μονοπάτι με l κορυφές έχει $l - 1$ ακμές.
- Για την αλυσίδα C_j, $|C_j| - 1$ είναι το πλήθος των ακμών που συνενώθηκαν για να πάρουμε την αλυσίδα. Όλες αυτές οι ακμές συναποτελούν το ταίριασμα M.

$$n = \sum_{j=1}^{r} (|C_j| - 1) + |D_M| = |M| + |D_M|.$$

Συνέχεια της απόδειξης

Ομοίως αποδεικνύεται και το «αντίστροφο»:

Λήμμα

Για κάθε αποσύνθεση D του P υπάρχει ταίριασμα M_D στο G έ. ώ. $|M_D| + |D| = n$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ:

1. Βρες μέγιστο ταίριασμα M^* στο G.
2. Επέστρεψε την αποσύνθεση D_{M^*}.

Από το πρώτο Λήμμα $|D_{M*}| = n - |M^*|$.
Από το δεύτερο Λήμμα το μέγεθος της ελάχιστης αποσύνθεσης είναι τουλάχιστον $n - |M^*|$. Άρα η D_{M^*} είναι ελάχιστη!

♡ Μέγιστο ταίριασμα M δίνει ελάχιστο $|D|$.

Το Θεώρημα του Mirsky

Το «δυϊκό» του Θεωρήματος του Dilworth ισχύει.

Θεώρημα (Mirsky, 1971)

Το μέγιστο μέγεθος αλυσίδας σε ένα πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P ισούται με το ελάχιστο πλήθος ξένων αντιαλυσίδων σε μια αποσύνθεση του P.

Συμβολίζουμε με $z(P)$ το μέγιστο μέγεθος αλυσίδας και $a(P)$ το ελάχιστο πλήθος ξένων αντιαλυσίδων σε μια αποσύνθεση.

Θα δείξουμε ότι

1. $z(P) \leq a(P)$.
2. $a(P) \leq z(P)$.

Αν υπάρχει αποσύνθεση του P σε r αντιαλυσίδες $A_1, \ldots, A_r$, οποιαδήποτε αλυσίδα C θα έχει μέγεθος το πολύ r, αφού η C δεν μπορεί να περιέχει πάνω από ένα στοιχείο από κάθε αντιαλυσίδα. Άρα $z(P) \leq a(P)$.

Πρόταση

Αν η μεγαλύτερη αλυσίδα C στο P έχει μέγεθος r, υπάρχει αποσύνθεση του P που αποτελείται από το πολύ r αντιαλυσίδες. Δηλ. $a(P) \leq z(P)$.

Αποδειξη: Για $r = 1$ ισχύει. Υπέθεσε ότι το θεώρημα ισχύει για $r - 1 \geq 1$, θα δείξουμε για $r \geq 2$. Όρισε M το σύνολο των μεγιστικών στοιχείων στο P. Το M είναι αντιαλυσίδα. Αν το $P - M$ περιέχει αλυσίδα $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_r$ αυτή ως μέγιστη στο P θα ήταν και μεγιστική στο P, επομένως $x_r \in M$, άτοπο.

Άρα η μέγιστη αλυσίδα στο $P - M$ έχει το πολύ $r - 1$ στοιχεία. Από την επαγωγική υπόθεση το $P - M$ είναι ένωση το πολύ $r - 1$ ξένων αντιαλυσίδων. Αυτές μαζί με την M δίνουν την επιθυμητή αποσύνθεση του P σε το πολύ r αντιαλυσίδες.

Η απόδειξη του Θεωρήματος του Mirsky υποδεικνύει έναν άπληστο αλγόριθμο που βρίσκει αποσύνθεση σε ελάχιστο αριθμό αντιαλυσίδων.

Η διατύπωση του αλγορίθμου και η τυπική απόδειξη της ορθότητας του αφήνονται σαν άσκηση.

Μελέτη της δομής $(2^S, \subseteq)$

Έστω πεπερασμένο σύνολο S με $|S| = n$. Η δομή $(2^S, \subseteq)$ ορίζει μια σχέση μερικής διάταξης πάνω στα υποσύνολα του S.

Θα εξετάσουμε κάποιες ιδιότητες αυτής της δομής. Κυρίως ερωτήματα της μορφής: πόσα υποσύνολα του S έχουν μια δεδομένη ιδιότητα.

Έστω πεπερασμένο σύνολο S με $|S| = n$. Η δομή $(2^S, \subseteq)$ ορίζει μια σχέση μερικής διάταξης πάνω στα υποσύνολα του S.

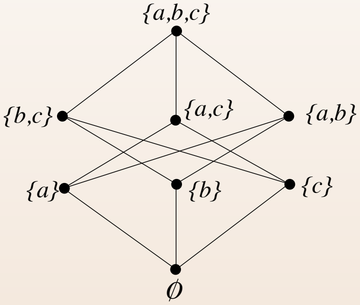
Θεώρημα

Έστω $\mathcal{A}$ μια συλλογή διακεκριμένων υποσυνόλων του S τ. ώ. $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, για κάθε $A_i, A_j \in \mathcal{A}$. Τότε $|\mathcal{A}| \leq 2^{n-1}$.

Έστω πεπερασμένο σύνολο S με $|S| = n$. Η δομή $(2^S, \subseteq)$ ορίζει μια σχέση μερικής διάταξης πάνω στα υποσύνολα του S.

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{A}$ μια συλλογή διακεκριμένων υποσυνόλων του S τ. ώ. $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, για κάθε $A_i, A_j \in \mathcal{A}$. Τότε $|\mathcal{A}| \leq 2^{n-1}$.



Έστω πεπερασμένο σύνολο S με $|S| = n$. Η δομή $(2^S, \subseteq)$ ορίζει μια σχέση μερικής διάταξης πάνω στα υποσύνολα του S.

Θεώρημα

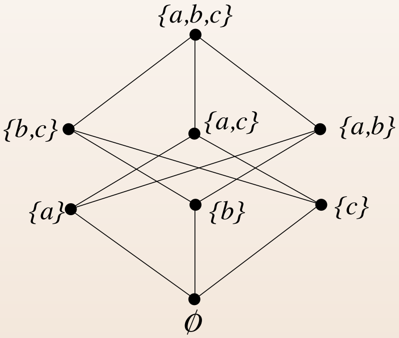
Έστω $\mathcal{A}$ μια συλλογή διακεκριμένων υποσυνόλων του S τ. ώ. $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, για κάθε $A_i, A_j \in \mathcal{A}$. Τότε $|\mathcal{A}| \leq 2^{n-1}$.

Αποδειξη: Αν $A \in \mathcal{A}$, για $\bar{A} = S - A$, $\bar{A} \notin \mathcal{A}$, αφού $A \cap \bar{A} = \varnothing$. Επομένως $|\mathcal{A}| \leq 2^{n-1}$.

Το άνω φράγμα δεν μπορεί να βελτιωθεί. Τα υποσύνολα του $\{1, \ldots, n\}$ που περιέχουν το 1 έχουν πλήθος 2^{n-1}.

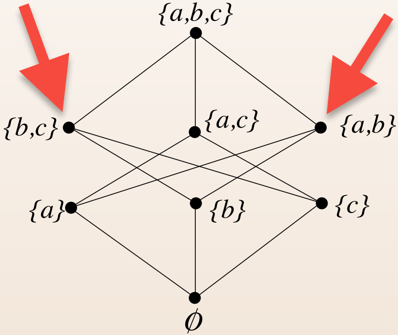
Έστω πεπερασμένο σύνολο S με $|S| = n$. Η δομή $(2^S, \subseteq)$ ορίζει μια σχέση μερικής διάταξης πάνω στα υποσύνολα του S.

Θυμίζουμε πως **αντιαλυσίδα** καλείται ένα σύνολο $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του S τα οποία είναι μη συγκρίσιμα ως προς τη σχέση μερικής διάταξης $\subseteq$. Δηλαδή, αν $A_i, A_j \in \mathcal{A}$, $A_i \not\subseteq A_j$.



Έστω πεπερασμένο σύνολο S με $|S| = n$. Η δομή $(2^S, \subseteq)$ ορίζει μια σχέση μερικής διάταξης πάνω στα υποσύνολα του S.

Θυμίζουμε πως **αντιαλυσίδα** καλείται ένα σύνολο $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του S τα οποία είναι μη συγκρίσιμα ως προς τη σχέση μερικής διάταξης $\subseteq$. Δηλαδή, αν $A_i, A_j \in \mathcal{A}$, $A_i \not\subseteq A_j$.

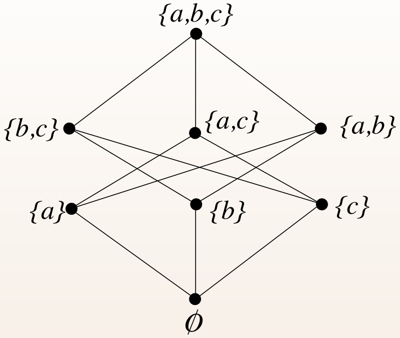


Έστω πεπερασμένο σύνολο S με $|S| = n$. Η δομή $(2^S, \subseteq)$ ορίζει μια σχέση μερικής διάταξης πάνω στα υποσύνολα του S.

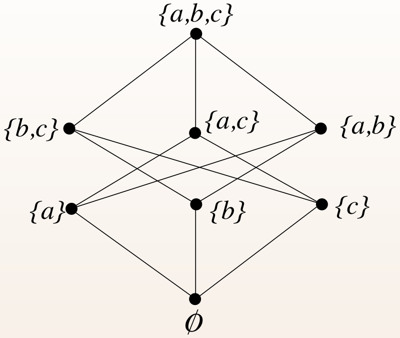
Θυμίζουμε πως αντιαλυσίδα καλείται ένα σύνολο $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του S τα οποία είναι μη συγκρίσιμα ως προς τη σχέση μερικής διάταξης $\subseteq$. Δηλαδή, αν $A_i, A_j \in \mathcal{A}$, $A_i \not\subseteq A_j$.

Πόσο μεγάλη μπορεί να είναι μια αντιαλυσίδα; Η οικογένεια *όλων των υποσυνόλων του S με τον ίδιο πληθικό αριθμό k*, $k = 0, 1, \ldots, n$, είναι αντιαλυσίδα. Κάθε τέτοια αντιαλυσίδα έχει $\binom{n}{k}$ στοιχεία.

Γνωρίζουμε πως $\max_k \binom{n}{k} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ (γιατί;). Υπάρχουν αντιαλυσίδες με μέγεθος μεγαλύτερο από $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$;



Παράδειγμα διατεταγμένου συνόλου 2^S όπου $|S| = 3$.
$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{3}{1} = 3$, άρα υπάρχει αντιαλυσίδα μεγέθους 3.



Παράδειγμα διατεταγμένου συνόλου 2^S όπου $|S| = 3$.
$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{3}{1} = 3$, άρα υπάρχει αντιαλυσίδα μεγέθους 3.

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

είναι μια αντιαλυσίδα μεγέθους 3.

Θεώρημα (Sperner, 1928)

Έστω $\mathcal{A}$ μια αντιαλυσίδα υποσυνόλων του S με $|S| = n$. Τότε

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Το Θεώρημα Sperner ισχύει μόνο για τη δομή $(2^S, \subseteq)$, όχι για οποιαδήποτε μερική διάταξη.

Θεώρημα (Sperner, 1928)

Έστω $\mathcal{A}$ μια αντιαλυσίδα υποσυνόλων του S με $|S| = n$. Τότε

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Απόδειξη: Έστω $A \subseteq S$. Ο αριθμός των μεταθέσεων των στοιχείων του S που ξεκινάνε με τα $|A|$ στοιχεία του A είναι $|A|!(n - |A|)!$. Μεταθέσεις που ξεκινάνε με δύο διαφορετικά σύνολα από το $\mathcal{A}$ είναι διακεκριμένες (γιατί;). Επομένως

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n - |A|)! \leq n!.$$

$p_k :=$ αριθμός στοιχείων του $\mathcal{A}$ μεγέθους k.

$$\sum_k k!(n-k)!p_k \leq n! \Rightarrow \sum_k \frac{p_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

Άρα $|\mathcal{A}| = \sum_k p_k = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_k \frac{p_k}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_k \frac{p_k}{\binom{n}{k}} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Άσκηση 1. Δώστε το καλύτερο κάτω φράγμα που μπορείτε στο πλήθος των διακεκριμένων αντιαλυσίδων της δομής $(2^S, \subseteq)$, όπου $|S| = n$.

Άσκηση 2. Βρείτε το μέγιστο μέγεθος αλυσίδας της δομής $(2^S, \subseteq)$, όπου $|S| = n$.

Άσκηση 3. Δώστε το καλύτερο κάτω φράγμα που μπορείτε στο πλήθος των διακεκριμένων αλυσίδων της δομής $(2^S, \subseteq)$, όπου $|S| = n$.