Μεταπτυχιακο Προγραμμα
στη Λογικη και Θεωρια Αλγοριθμων και Υπολογισμου

$\mu\prod\lambda\forall$

Τριγωνοποιήσεις και Απαλείφουσα

Διπλωματικη εργασια

Χρήστος Κοναξής

Επιβλέπων: Ιωάννης Ζ. Εμίρης, Αν. Καθηγητής,
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, ΕΚΠΑ

Αθήνα, Ιούλιος 2006

Στη μητέρα μου.

Given free will but within certain limitations,
I cannot will myself to limitless mutations,
I cannot know what I would be if I were not me,
I can only guess me. .

Robert Wyatt

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Περίληψη

Το αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι η απαρίθμηση των κλάσεων ισοδυναμίας μεικτών κελιών μιας οικογένειας συνόλων σημείων και ο υπολογισμός του πολυτόπου του Νεύτωνα της απαλείφουσας ενός συστήματος πολυωνύμων.

Υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία των κλάσεων αυτών, με τις κορυφές του πολυτόπου του Νεύτωνα της απαλείφουσας του συστήματος πολυωνύμων με σύνολα στήριξης στην οικογένεια αυτή. Η αντιστοιχία αυτή μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τα ακραία μονώνυμα (extreme monomials) της απαλείφουσας.

Μέσω του τεχνάσματος Cayley, η απαρίθμηση όλων των κλάσεων ισοδυναμίας μεικτών κελιών, ανάγεται στην απαρίθμηση όλων των κλάσεων ισοδυναμίας των κανονικών τριγωνοποιήσεων ενός νέου συνόλου. Η απαρίθμηση των τελευταίων μπορεί να γίνει με εφαρμογή διαδοχικών τοπικών μετασχηματισμών (bistellar flips) σε κατάλληλα υποσύνολα ξεκινώντας από μια αρχική τριγωνοποίηση.

Προτείνεται η τροποποίηση ενός αποτελεσματικού αλγορίθμου αντίστροφης αναζήτησης [14], ώστε αυτός να υπολογίζει μόνο τις κλάσεις ισοδυναμίας των κανονικών τριγωνοποιήσεων.

Τέλος, δίνεται μια εφαρμογή των παραπάνω μεθόδων με την περιγραφή ενός αλγορίθμου αλγεβρικοποίησης [7], ο οποίος υπολογίζει ένα υπερσύνολο των μονωνύμων της αλγεβρικής εξίσωσης μιας παραμετρικά δοσμένης (υπερ)επιφάνειας.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Ιωάννη Εμίρη, γιατί με έφερε σε επαφή με ένα συναρπαστικό και σχεδόν άγνωστο σ′ εμένα πεδίο, για τις υποδείξεις και την συνεχή στήριξή του. Ευχαριστώ επίσης τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, καθηγητές κ. Ηλία Κουτσουπιά και κ. Ευάγγελο Ράπτη. Στον τελευταίο οφείλω ένα ιδιαίτερο ευχαριστώ για τη συνεχή ενθάρρυνση και την εμπιστοσύνη του. Χωρίς αυτές δεν θα ήταν δυνατή η συνέχιση των σπουδών μου.

Ευχαριστώ όλους τους συντελεστές του Μεταπτυχιακού Προγράμματος στη Λογική και την θεωρία Αλγορίθμων και ιδιαίτερα τους καθηγητές κ. Γ. Μοσχοβάκη και κ. Κ. Δημητρακόπουλο για τη συμβολή τους στη δημιουργία ενός φιλικού και επιστημονικά καρποφόρου κλίματος.

Τέλος ευχαριστώ τον πατέρα μου και τους φίλους μου για την υπομονή και την στήριξή τους καθ′ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Αθήνα,
Ιούλιος 2006

Χρήστος Κοναξής

Εισαγωγή

Το κύριο αντικείμενο μελέτης στην εργασία αυτή είναι το πολύτοπο του Νεύτωνα της τορικής ή αραιάς απαλοίφουσας ενός υπερπροσδιορισμένου συστήματος πολυωνύμων με συμβολικούς συντελεστές και η ανάπτυξη αλγορίθμων για τον υπολογισμό του. Περιγράφονται βασικά στοιχεία της θεωρίας αραιάς απαλοιφής καθώς και τα εργαλεία από τη συνδυαστική γεωμετρία που αυτή χρησιμοποιεί.

Η θεωρία αραιάς απαλοιφής ξεκίνησε από την εργασία των Gelfand, Kapranov και Zelevinsky [9] το 1994, όπου εισήγαγαν την μελέτη διακρινουσών και απαλοιφουσών με συνδυαστικά εργαλεία. Από τότε το πεδίο έχει μελετηθεί και αναπτυχθεί έντονα και εφαρμόζεται στην επίλυση πολυωνυμικών συστημάτων, στην απαλοιφή μεταβλητών, στην αλγεβρικοποίηση και αλλού. Ένα παράδειγμα εφαρμογής στην αλγεβρικοποίηση δίνουμε στο κεφάλαιο 5 με την περιγραφή του αλγορίθμου IPSOS [7], τροποποιημένου ώστε να χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής. Συγκεκριμένα ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια υλοποίηση του J. De Loera [5], η οποία υπολογίζει όλες τις κανονικές τριγωνοποιήσεις ενός συνόλου σημείων. Αντικαθιστούμε αυτή την υλοποίηση με μια νέα που βασίζεται στην αντίστροφη αναζήτηση και υπολογίζει κλάσεις ισοδυναμίας κανονικών τριγωνοποιήσεων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την δραστική μείωση της πολυπλοκότητας χώρου του αλγορίθμου αλγεβρικοποίησης.

Η κλασική ή προβολική απαλοίφουσα ενός συστήματος n πολυωνύμων f_1, $\ldots$, f_n σε n μεταβλητές με συμβολικούς συντελεστές, είναι ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές και μεταβλητές τους συντελεστές των πολυωνύμων, το οποίο μας παρέχει μια συνθήκη για την επιλυσιμότητα του συστήματος των f_i. Συγκεκριμένα η προβολική απαλοίφουσα μηδενίζεται αν και μόνο αν τα πολυώνυμα που αντιστοιχούν σε μια ανάθεση τιμών στους συμβολικούς συντελεστές, έχουν κοινή ρίζα. Με άλλα λόγια για συστήματα συγκεκριμένης δομής η οποία καθορίζεται από τους βαθμούς των πολυωνύμων, η προβολική απαλοίφουσα αποτελεί ένα κριτήριο για τις τιμές των συντελεστών που αντιστοιχούν σε συστήματα τα οποία έχουν λύση. Για τον υπολογισμό της προβολικής απαλοίφουσας κατασκευάζονται πίνακες η ορίζουσα των οποίων ισούται με την απαλοίφουσα ή με ένα πολλαπλάσιό της. Οι πίνακες αυτοί εν δυνάμει μπορούν να περιέχουν οποιοδήποτε μονώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου του βαθμού κάθε πολυωνύμου και αυτό αυξάνει σημαντικά το μέγεθός τους. Επιπλέον η ορίζουσα των πινάκων αυτών μπορεί να μηδενίζεται ταυτοτικά με αποτέλεσμα να μην ορίζεται η προβολική απαλοίφουσα. Σε κάποιες από αυτές τις περιπτώσεις είναι δυνατόν να οριστεί η τορική απαλοίφουσα.

Η τορική ή αραιά απαλοίφουσα εξετάζει την ύπαρξη ριζών στον χώρο $(\mathbb{C}^*)^n$. Γενικεύει τα αποτελέσματα της κλασικής θεωρίας απαλοιφής με την έννοια ότι ταυτίζεται με την προβολική απαλοίφουσα για συστήματα πυκνών πολυωνύμων. Σε αντίθεση με τον χαρακτηρισμό των πολυωνύμων μέσω του βαθμού τους, η θεωρία αραιάς απαλοιφής εκμεταλλεύεται την δομή τους θεωρώντας τα ως αθροίσματα μονωνύμων. Η δομή αυτή αντανακλάται γεωμετρικά από το πολύτοπο του Νεύτωνα. Αν αντιστοιχήσουμε κάθε μονώνυμο με μη μηδενικό συντελεστή ενός πολυωνύμου f, με το διάνυσμα των εκθετών του, τότε το πολύτοπο του Νεύτωνα $N(f)$ του πολυωνύμου είναι το κυρτό περίβλημα των διανυσμάτων αυτών. Το πολύτοπο αυτό παρέχει πολλές πληροφορίες σχετικά με την γεωμετρική δομή της υπερεπιφάνειας $f = 0$. Συγκεκριμένα η ασυμπτωτική συμπεριφορά της υπερεπιφάνειας αυτής καθορίζεται από τις κορυφές του πολυτόπου $N(f)$. Επιπλέον το πολύτοπο του Νεύτωνα εκφράζει την αραιότητα του πολυωνύμου. Η εκμετάλλευση της δομής των πολυωνύμων οδηγεί σε μικρότερους πίνακες της απαλοίφουσας και επομένως σε βελτίωση της πολυπλοκότητας υπολογισμού της.

Μια από τις πιο εντυπωσιακές εφαρμογές των πολυτόπων του Νεύτωνα σε αλγεβρικά προβλήματα οφείλεται στους Bernstein, Kouchnirenko και Khovansky οι οποίοι έδωσαν φράγματα στον πλήθος των λύσεων πολυωνυμικών συστημάτων χρησιμοποιώντας μεικτούς όγκους. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύει ένα κλασικό αποτέλεσμα του Bézout το οποίο παρέχει φράγματα στο πλήθος των λύσεων που εκφράζονται από το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων. Ο βαθμός της τορικής απαλοίφουσας σχετίζεται επίσης με το φράγμα του Bernstein.

Επαληθεύοντας την στενή σχέση της θεωρίας αραιάς απαλοιφής με τη συνδυαστική γεωμετρία, ένα σημαντικό αποτέλεσμα [9, 18] είναι η περιγραφή του πολυτόπου του Νεύτωνα $N(\mathcal{R})$, της τορικής απαλοίφουσας $\mathcal{R}$, μέσω των τριγωνοποιήσεων ενός συνόλου σημείων. Συγκεκριμένα μπορούμε να υπολογίσουμε τις κορυφές του πολυτόπου $N(\mathcal{R})$ υπολογίζοντας μερικές μόνο από τις τριγωνοποιήσεις του πολυτόπου του Νεύτωνα ενός βοηθητικού πολυωνύμου. Το πολύτοπο του Νεύτωνα αυτού του βοηθητικού πολυωνύμου μπορεί να κατασκευαστεί και μέσω της απεικόνισης Cayley όπως περιγράφεται στην ενότητα 3.1. Το αποτέλεσμα αυτό εκμεταλλευόμαστε στο κεφάλαιο 4, τροποποιώντας έναν αλγόριθμο απαρίθμησης κανονικών τριγωνοποιήσεων [12], ώστε να απαριθμεί μόνο κλάσεις ισοδυναμίας των κανονικών τριγωνοποιήσεων μέσω των οποίων μπορούμε να ανακτήσουμε τις κορυφές του $N(\mathcal{R})$.

Κεφάλαιο 1

Θεωρία Αλγεβρικής Απαλοιφής

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται συνοπτικά τα βασικά στοιχεία της θεωρίας αλγεβρικής απαλοιφής (elimination theory).

1.1 Κλασική (προβολική) Απαλοίφουσα

Η απαλοίφουσα ή Sylvester resultant $\mathcal{R} = Res(f, g, x)$, ενός συστήματος δυο πολυωνύμων $f, g \in \mathbb{C}[x]$, με

$$
\begin{aligned}
f &= a_0x^n + \ldots + a_n,\ a_0 \neq 0,\ n > 0, \\
g &= b_0x^m + \ldots + b_m,\ b_0 \neq 0,\ m > 0,
\end{aligned}
$$

ορίζεται ως η ορίζουσα του $(n+m) \times (n+m)$ πίνακα Sylvester:

$$
S = \begin{bmatrix}
a_0 & & & & b_0 & & & \\
a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & \\
a_2 & a_1 & \ddots & & b_2 & b_1 & \ddots & \\
\vdots & a_2 & \ddots & a_0 & \vdots & b_2 & \ddots & b_0 \\
a_n & \vdots & \ddots & a_1 & b_m & \vdots & \ddots & b_1 \\
 & a_n & & a_2 & & b_m & & b_2 \\
 & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\
 & & & a_n & & & & b_m
\end{bmatrix}
$$

Ο πίνακας Sylvester εμφανίζεται στη βιβλιογραφία και ως ο ανάστροφος του παραπάνω πίνακα.

Θα λέμε ότι το G είναι ένα πολυώνυμο στους συντελεστές των $f_0, f_1, \ldots, f_n$ αν για κάθε συντελεστή c_{ij} των f_i υπάρχει μια μεταβλητή u_{ij} στο G. Με $G(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ συμβολίζουμε τον αριθμό που παίρνουμε αντικαθιστώντας κάθε μεταβλητή u_{ij} με τον αντίστοιχο συντελεστή c_{ij} του f_i.

Η απαλοίφουσα $\mathcal{R} = Res(f, g, x)$ είναι ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές, με μεταβλητές τους (συμβολικούς) συντελεστές των f, g , που μηδενίζεται όποτε τα f, g έχουν κοινή ρίζα. Το όνομά της οφείλεται στο γεγονός ότι η $Res(f, g, x)$ απαλείφει τη μεταβλητή x από το σύστημα των f, g. Τα παραπάνω συμφωνούν με τους ορισμούς 1.1.2 και 1.2.6, που δίνουμε στη συνέχεια.

Η απαλείφουσα $\mathcal{R} = Res(f, g, x)$ μπορεί να εκφραστεί με πολλούς τρόπους. Για παράδειγμα αν $x_1, \ldots, x_m$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου g, τότε η απαλείφουσα δίνεται από τον τύπο

$$\mathcal{R} = Res(f, g, x) = a_0^m \prod_{i=1}^{m} g(x_i). \tag{1.1}$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια της απαλοίφουσας και για πολυώνυμα με περισσότερες από μια μεταβλητές.

Ορισμός 1.1.1. Ο προβολικός χώρος $\mathbb{P}^n$ είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των διανυσμάτων στο $\mathbb{C}^n + 1$ με τουλάχιστον μια μη μηδενική συντεταγμένη, όπου ταυτίζουμε τα πολλαπλάσια με ένα μη μηδενικό σταθερό αριθμό $l \in \mathbb{C}^*$. Δηλαδή:

$$\mathbb{P}^n := \{(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} | \exists i \; c_i \neq 0 \& (c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}) \equiv l(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}), \; l \in \mathbb{C}^*\}.$$

Έστω $F_0, F_1, \ldots, F_n$, $n + 1$ *ομογενή* πολυώνυμα με συμβολικούς συντελεστές u_{ij}, συνολικού βαθμού $d_0, \ldots, d_n$ αντίστοιχα, στον $\mathbb{C}[\mathrm{x}]$, όπου $\mathrm{x} = x_0, \ldots, x_n$. Το σύστημα των $n + 1$ εξισώσεων σε $n + 1$ αγνώστους

$$F_0(\mathrm{x}) = F_1(\mathrm{x}) = \cdots = F_n(\mathrm{x}) = 0 \tag{1.2}$$

έχει πάντα τη μηδενική λύση $(x_0, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$. Μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε πότε έχει και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής. Την απάντηση στο ερώτημα αυτό μας την δίνει η απαλοίφουσα του συστήματος (1.2):

Ορισμός 1.1.2. Η προβολική απαλοίφουσα $\mathcal{R} = Res(F_0, F_1, \ldots, F_n)$ είναι ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές, με μεταβλητές τους (συμβολικούς) συντελεστές u_{ij} των $F_0, F_1, \ldots, F_n$, για το οποίο ισχύει $\mathcal{R} = 0$ αν και μόνο αν το σύστημα (1.2) έχει μη μηδενική κοινή λύση στο $\mathbb{P}^n$.

Θεώρημα 1.1.1. *[9] Η απαλοίφουσα $\mathcal{R} = Res(F_0, F_1, \ldots, F_n)$ του συστήματος (1.2) είναι το μοναδικό ανάγωγο πολυώνυμο στον $\mathbb{Z}[u_{ij}]$, για το οποίο ισχύει $\mathcal{R} = 0$ ανν το σύστημα (1.2) έχει μη μηδενική κοινή λύση στο $\mathbb{P}^n$.*

Παράδειγμα 1.1.1. Έστω το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} F_0 &= c_{00}x_0 + \cdots + c_{0n}x_n = 0 \\ &\vdots \\ F_n &= c_{n0}x_0 + \cdots + c_{nn}x_n = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Το σύστημα (1.3) έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του είναι ίση με μηδέν. Η ορίζουσα αυτή είναι ένα πολυώνυμο στους συντελεστές των F_i και ταυτίζεται με την απαλοίφουσα του συστήματος.

Ο τύπος 1.1 μπορεί να γενικευτεί και στην περίπτωση ομογενών πολυωνύμων $F_0, F_1, \ldots, F_n \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, βαθμών $d_0, \ldots, d_n$ αντίστοιχα, με την υπόθεση ότι $Res(\overline{F}_0, \overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_{n-1}) \neq 0$:

$$\mathcal{R} = Res(F_0, F_1, \ldots, F_n) = Res(\overline{F}_0, \overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_{n-1})^{d_n} \prod_{p \in V} f_n(p)^{m(p)}, \quad (1.4)$$

όπου

$$\begin{aligned} f_i(x_0, \ldots, x_{n-1}) &= F_i(x_0, \ldots, x_{n-1}, 1), \\ \overline{F}_i(x_0, \ldots, x_{n-1}) &= F_i(x_0, \ldots, x_{n-1}, 0), \end{aligned}$$

$V = V(f_0, \ldots, f_{n-1})$, το σύνολο λύσεων των πολυωνύμων $f_0, \ldots, f_{n-1}$ (δηλαδή το ομοπαραλληλικό (affine) τμήμα του προβολικού αλγεβρικού συνόλου $V(F_0, \ldots, F_{n-1})$) και $m(p)$ η πολλαπλότητα της ρίζας $p \in V$.

Η απαλοίφουσα ενός συστήματος ομογενών πολυωνύμων υπολογίζεται είτε ως το πηλίκο της ορίζουσας ενός κατάλληλου τετραγωνικού πίνακα προς την ορίζουσα ενός υποπινακά του [13], είτε ως ο μέγιστος κοινός διαιρέτης ενός συνόλου οριζουσών κατάλληλων πινάκων. Στόχος είναι η κατασκευή τετραγωνικών πινάκων ελάχιστης διάστασης, οπότε η απαλοίφουσα είναι η οριζουσά τους. Γενικά δεν υπάρχει τύπος για τον υπολογισμό της απαλοίφουσας σε συνάρτηση των συντελεστών του συστήματος. Σε μερικές περιπτώσεις είναι δυνατός ο υπολογισμός της ως ορίζουσα ενός μόνο πίνακα και τότε λέμε ότι ο τύπος είναι determinental. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις επιδιώκεται η κατασκευή πινάκων με το μικρότερο δυνατό μέγεθος.

1.2 Τορική (toric) Απαλοίφουσα

Υπάρχουν συστήματα των οποίων η κλασική απαλοίφουσα είναι ταυτοτικά μηδενική. Αυτό συμβαίνει όταν υπάρχει ένα σύνολο ριζών στο άπειρο του οποίου η διάσταση είναι θετική. Σε αυτές τις περιπτώσεις μια διαφορετική απαλείφουσα μπορεί να οριστεί, η οποία και θα παρέχει ένα κριτήριο για την ύπαρξη ή μη λύσεων του συστήματος.

Η κλασική απαλοίφουσα που ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα, αφορά σε πυκνά (dense) πολυώνυμα, τα οποία περιέχουν όλα τα μονώνυμα συνολικού βαθμού ίσου με το συνολικό βαθμό του πολυωνύμου [1] και παρέχει πληροφορίες

[1] Ακριβέστερα, ένα πολυώνυμο σε n μεταβλητές είναι πυκνό όταν έχει πολύτοπο του Νεύτωνα που είναι Minkowski πολλαπλάσιο του μοναδιαίου απλόκου στον $\mathbb{R}^n$, βλ. Ορισμούς 1.2.2 και 1.2.3.

για την ύπαρξη προβολικών ριζών. Στη πράξη όμως, συχνά συναντάμε πολυώνυμα πολλοί από τους συντελεστές των οποίων είναι μηδενικοί. Τότε είναι σημαντικό να οριστεί μια τορική (toric) ή αραιά (sparse) απαλοίφουσα, η οποία εκμεταλλεύεται τη δομή των συγκεκριμένων πολυωνύμων. Ενώ η κλασική απαλοίφουσα εκφράζει την ύπαρξη προβολικών ριζών (δηλαδή ριζών στο $\mathbb{P}^n$), η τορική απαλοίφουσα εκφράζει την ύπαρξη τορικών ριζών, δηλαδή ριζών σε μια τορική πολλαπλότητα (manifold) T της οποίας ο τόρος $(\mathbb{C}^*)^n$ είναι πυκνό υποσύνολο, $(\mathbb{C}^*)^n \subseteq T \subseteq \mathbb{P}^m$, όπου m είναι το πλήθος των μονωνύμων όλων των πολυωνύμων.

1.2.1 Πολύτοπα, αθροίσματα Minkowski και μεικτός όγκος

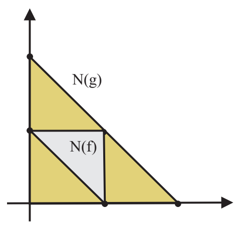
Ορισμός 1.2.1. Το σύνολο στήριξης (support) $A \subset \mathbb{Z}^n$ ενός πολυωνύμου $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, είναι το σύνολο των διανυσμάτων των εκθετών των μονωνύμων με μη μηδενικό συντελεστή του f. Αν $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, τότε $f = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathrm{x}^{a_i}$, όπου $c_i \neq 0, \forall i = 1, \ldots, k$.

Ένα πολύτοπο είναι το κυρτό περίβλημα ενός πεπερασμένου συνόλου σημείων.

Ορισμός 1.2.2. Έστω ένα πολυώνυμο $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ με σύνολο στήριξης $A \subset \mathbb{Z}^n$. Το πολύτοπο του Νεύτωνα $N(f)$ του πολυωνύμου f είναι το κυρτό περίβλημα $conv(A)$ του συνόλου στήριξής του.

Το πολύτοπο του Νεύτωνα ενός πολυωνύμου αντικατοπτρίζει γεωμετρικά την δομή του και αποτελεί το εργαλείο για την μελέτη αλγεβρικών ιδιοτήτων μέσω της συνδυαστικής γεωμετρίας.

Παράδειγμα 1.2.1. Έστω το πυκνό δευτεροβάθμιο πολυώνυμο $g(x,y) = c_0 + c_1x + c_2y + c_3x^2 + c_4xy + c_5y^2$ και το αραιό πολυώνυμο επίσης δευτέρου βαθμού, $f(x,y) = a_1x - a_2y - a_3xy$. Στο Σχήμα 1.1 βλέπουμε τα πολύτοπα του Νεύτωνα των πολυωνύμων f, g. Είναι φανερό πως το πολυώνυμο f έχει πολύ μικρότερο πολύτοπο του Νεύτωνα από το πολυώνυμο g.



Σχήμα 1.1: Τα πολύτοπα του Νεύτωνα για το παράδειγμα 1.2.1.

Ακολουθώντας μια αντίστροφη διαδικασία, δοθέντος ενός συνόλου $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{Z}^n$, μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο των πολυωνύμων, των οποίων τα μονώνυμα έχουν εκθέτες στο A:

$$L(A) = \{c_1 \mathrm{x}^{a_1} + \cdots + c_k \mathrm{x}^{a_k} \mid c_i \in \mathbb{C}\}.$$

Το σύνολο $L(A)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ διάστασης k.

Εφόσον το σύνολο A μπορεί να περιέχει και διανύσματα με αρνητικές συντεταγμένες, πρέπει να επεκτείνουμε τους ορισμούς των μονωνύμων και πολυωνύμων ώστε να έχουμε και τα αντίστοιχα αλγεβρικά αντικείμενα. Αυτό οδηγεί στην έννοια των Laurent μονωνύμων και πολυωνύμων:
Έστω $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, ένα διάνυσμα με ακέραιες συντεταγμένες. Το αντίστοιχο Laurent μονώνυμο στις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ είναι το $\mathrm{x}^a = x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$. Τα Laurent πολυώνυμα είναι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί Laurent μονωνύμων. Το σύνολο των Laurent πολυωνύμων είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πολυωνύμων και συμβολίζεται $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$.

Για τη συνέχεια θα χρειαστούμε μερικές γεωμετρικές έννοιες.

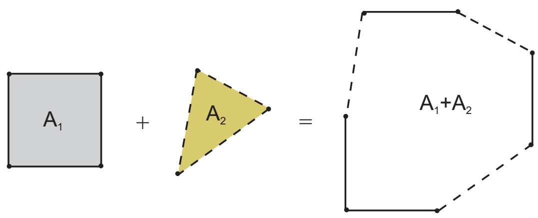
Ορισμός 1.2.3. Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ και $\lambda \geq 0$ πραγματικός αριθμός.
α. Το άθροισμα Minkowksi $A + B$ των δυο συνόλων είναι

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \ \&\ b \in B\} \subset \mathbb{R}^n.$$

β. Το βαθμωτό γινόμενο του A με το λ είναι

$$\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Αν τα A, B είναι πολύτοπα, τότε και το $A + B$ είναι πολύτοπο και επιπλέον μπορεί να υπολογιστεί ως η κυρτή θήκη του συνόλου $\{a+b \mid a \in Vert(A),\ b \in Vert(B)\}$, όπου με $Vert(P)$ συμβολίζουμε το σύνολο των κορυφών του πολυτόπου P.



Σχήμα 1.2: Άθροισμα Minkowski ενός τριγώνου και ενός τετραγώνου.

Μπορούμε να επεκτείνουμε τους παραπάνω ορισμούς και για οποιοδήποτε (πεπερασμένο) πλήθος συνόλων ή πολυτόπων.

Το άθροισμα Minkowski των πολυτόπων του Νεύτωνα δυο πολυωνύμων f, g αντιστοιχεί στο πολύτοπο του Νεύτωνα του γινομένου $f \cdot g$, δηλαδή $N(f) + N(g) = N(f \cdot g)$.

Μια από τις πρώτες εφαρμογές των πολυτόπων του Νεύτωνα ήταν στην εύρεση του αριθμού των κοινών ριζών ενός συστήματος πολυωνυμικών εξισώσεων.

Έστω Vol(P) ο ευκλείδιος όγκος του πολυτόπου $P \subset \mathbb{R}^n$ ορισμένος έτσι ώστε ο μοναδιαίος κύβος στον $\mathbb{R}^n$ να έχει μοναδιαίο όγκο. Για τυχαία πολύτοπα $P_1, \ldots, P_n$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$, η έκφραση $\mathrm{Vol}(\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n)$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο στις μεταβλητές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, βαθμού n, [10].

Ορισμός 1.2.4. Ο μεικτός όγκος $MV(P_1, \ldots, P_n)$ των πολυτόπων $P_1, \ldots, P_n \subset \mathbb{R}^n$ είναι ο συντελεστής του γραμμικού όρου, δηλαδή του όρου $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, του πολυωνύμου $Vol(\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n)$, θεωρούμενο ως πολυώνυμο στις μεταβλητές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Ένας ισοδύναμος ορισμός του μεικτού όγκου των πολυτόπων $P_1, \ldots, P_n$ είναι ο επόμενος.

Ορισμός 1.2.5. Έστω $P_1, \ldots, P_n \subset \mathbb{R}^n$ πολύτοπα και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$. Υπάρχει μια μοναδική πραγματική συνάρτηση $MV(P_1, \ldots, P_n)$ για την οποία ισχύουν τα εξής:
α. Η $MV(P_1, \ldots, P_n)$ είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή, δηλαδή

$$MV(P_1, \ldots, \lambda_k P_k + \mu P_k', \ldots, P_n) = \lambda MV(P_1, \ldots, P_k, \ldots, P_n) + \mu MV(P_1, \ldots, P_k', \ldots, P_n),$$

β. $MV(P_1, \ldots, P_n) = n! \cdot \mathrm{Vol}(P)$, αν $P_1 = \cdots = P_n = P$.

Πόρισμα 1.2.1. *$MV(P_1, \ldots, P_n) \geq 0$. Ισότητα ισχύει αν το $\sum P_i$ έχει μηδενικό όγκο (ισοδύναμα διάσταση μικρότερη του n) ή αν υπάρχει κάποιο P_i τέτοιο που $dim(P_i) = 0$.*

Πόρισμα 1.2.2. *Η $MV(P_1, \ldots, P_n)$ μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο (εγκλεισμού - αποκλεισμού):*

$$MV(P_1, \ldots, P_n) = \sum_{I \subset \{1, \ldots, n\}} (-1)^{n-|I|} \mathrm{Vol}\left(\sum_{i \in I} P_i\right). \tag{1.5}$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε φράγματα στον αριθμό των κοινών ριζών καλά ορισμένων (τετράγωνων) συστημάτων πολυωνύμων. Έστω ένα σύστημα πολυωνύμων

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0, \ f_i \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}], \tag{1.6}$$

και $P_i = N(f_i), \ i = 1, \ldots, n$, τα πολύτοπα του Νεύτωνα των πολυωνύμων f_i. Αν τα σύνολα στήριξης των πολυωνύμων f_i ταυτίζονται, το σύστημα καλείται μη μεικτό, διαφορετικά καλείται μεικτό.

Το πρώτο φράγμα που θα εξετάσουμε δίνεται από το θεώρημα του Bézout και αφορά στις κοινές ρίζες των πολυωνύμων στον $\mathbb{C}^n$ ή στον $\mathbb{P}^n$.

Θεώρημα 1.2.3. *(Bézout)[4] Αν το σύστημα (1.6) έχει πεπερασμένο αριθμό λύσεων και καμία λύση στο άπειρο, τότε έχει το πολύ $d = d_1 \cdot d_2 \ldots d_n$ λύσεις στον $\mathbb{C}^n$, όπου d_i ο βαθμός του πολυωνύμου f_i. Επιπλέον αν τα πολυώνυμα f_i είναι γενικά (generic), τότε το φράγμα είναι ακριβές.*

Το επόμενο θεώρημα που αποδείχθηκε από τον D. Bernstein το 1975 γενικεύει το θεώρημα του Bézout. Η περίπτωση δυο πολυωνύμων σε δυο μεταβλητές είχε ήδη αποδειχθεί από τον Minding το 1841, πριν ο Minkowski εισάγει την έννοια των μεικτών όγκων.

Θεώρημα 1.2.4. *(Bernstein ή BKK)[4, 9] Αν το σύστημα (1.6) έχει πεπερασμένο αριθμό λύσεων, τότε έχει το πολύ* $d = MV(P_1, \ldots, P_n)$ *λύσεις στον* $(\mathbb{C}^*)^n$*. Επιπλέον αν τα πολυώνυμα* f_i *είναι γενικά (generic), τότε το φράγμα είναι ακριβές.*

1.2.2 Ορισμός και ιδιότητες της τορικής απαλοίφουσας

Η αραιή ή τορική απαλείφουσα, ορίζεται για υπερπροσδιορισμένα συστήματα της μορφής

$$f_0 = f_1 = \cdots = f_n = 0 \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]. \tag{1.7}$$

Στη περίπτωση αυτή δεν ορίζεται ο μεικτός όγκος του συστήματος. Μπορούμε όμως να εξάγουμε ένα άνω φράγμα στον αριθμό των κοινών ριζών του συστήματος χρησιμοποιώντας μεικτούς όγκους.

Παρατήρηση 1.2.1. Αν το σύστημα (1.7) έχει πεπερασμένο αριθμό λύσεων, τότε έχει το πολύ $d = MV_{-i}(P_0, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_n)$ λύσεις στον $(\mathbb{C}^*)^n$. Επιπλέον αν τα πολυώνυμα f_i είναι γενικά (generic), τότε το φράγμα είναι ακριβές.

Έστω $A_0, A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$ τέτοια που το $\sum_{i=0}^n A_i$ να παράγει τον $\mathbb{Z}^n$ και $f_i \in L(A_i)$, Laurent πολυώνυμα με σύνολα στήριξης τα A_i. Κάθε f_i είναι της μορφής $f_i = \sum_{a_{ij} \in A_i} c_{ij} x^{a_{ij}}$. Ταυτίζουμε κάθε πολυώνυμο f_i με το διάνυσμα των συντελεστών του, $c_i = (c_{i0}, c_{i1}, \ldots, c_{in})$ και το σύστημα των f_i με το διάνυσμα $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$.

Θεωρούμε το σύνολο Z_0 των διανυσμάτων c που αντιστοιχούν σε συστήματα πολυωνύμων της μορφής (1.7) με $f_i \in L(A_i)$, και τα οποία έχουν κοινή ρίζα. Έστω Z η Zariski κλειστότητα του συνόλου Z_0. Το σύνολο Z είναι ένα ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο. Η τορική απαλείφουσα του συστήματος των f_i είναι το μοναδικό ανάγωγο πολυώνυμο που ορίζει την Z.

Ορισμός 1.2.6. Η αραιή ή τορική απαλείφουσα $\mathcal{R} = Res(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ των πολυωνύμων $f_0, f_1, \ldots, f_n$ είναι το μοναδικό (μέχρις προσήμου) πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές και μεταβλητές τους συμβολικούς συντελεστές των f_i, δηλαδή $R \in \mathbb{Z}[c]$, με τις ακόλουθες ιδιότητες:
α) αν $codim(Z) = 1$, τότε η $\mathcal{R}$ είναι το μοναδικό ανάγωγο πολυώνυμο που ορίζει την υπερεπιφάνεια Z,
β) αν $codim(Z) > 1$, τότε $\mathcal{R} := 1$.

Πόρισμα 1.2.5. *Το* $\mathcal{R}$ *είναι ομογενές πολυώνυμο ως προς τους συμβολικούς συντελεστές κάθε πολυωνύμου* f_i*, βαθμού ίσου με* $MV_{-i}(f_0, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_n)$*. Αν τα πολυώνυμα* f_i *έχουν κοινή ρίζα στον* $(\mathbb{C}^*)^n$*, τότε* $R = 0$*.*

Αν τα πολυώνυμα f_i είναι πλήρη, (ισοδύναμα τα σύνολα $P_i = conv(A_i)$ είναι Minkowski πολλαπλάσια του μοναδιαίου απλόκου στον $\mathbb{Z}^n$), τότε η αραιή απαλείφουσα ταυτίζεται με την κλασική απαλείφουσα.

Ορισμός 1.2.7. Η οικογένεια των συνόλων στήριξης A_i των πολυωνύμων f_i, $i = 0, \ldots, n$, θα καλείται ουσιώδης (essential) αν για το ομοπαραλληλικό πλέγμα (affine lattice)

$$\mathcal{L} := \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \mid a_i \in A_i,\ \lambda_i \in \mathbb{Z},\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

που παράγεται από τα A_i ισχύει $rank(\mathcal{L}) = n$ και $rank(\mathcal{L}') \geq |J|$ για κάθε $J \subset \{0, 1, \ldots, n\}$, όπου $\mathcal{L}'$ είναι το ομοπαραλληλικό πλέγμα που παράγεται από την οικογένεια συνόλων στήριξης $\{A_j \; | j \in J\}$. .

Αν κάθε σύνολο A_i έχει κυρτή θήκη διάστασης n, τότε η οικογένεια των συνόλων στήριξης A_i είναι ουσιώδης.

Πόρισμα 1.2.6. *[19] Έστω η οικογένεια συνόλων στήριξης $\{A_i\}_{i \in I}$. Για το αλγεβρικό σύνολο Z (βλ. Ορισμό 1.2.6) ισχύει $codim(Z) = 1$ αν και μόνο αν υπάρχει μια μοναδική υποοικογένεια συνόλων στήριξης $\{A_i\}_{i \in J}$ η οποία είναι ουσιώδης. Τότε η τορική απαλοίφουσα του συστήματος πολυωνύμων με σύνολα στήριξης τα $\{A_i\}_{i \in I}$ ταυτίζεται με την τορική απαλοίφουσα του συστήματος πολυωνύμων με σύνολα στήριξης $\{A_i\}_{i \in J}$.*

Ο υπολογισμός των τορικών απαλειφουσών βασίζεται στην κατασκευή ενός τετραγωνικού πίνακα M του οποίου η ορίζουσα είτε ισούται με την απαλείφουσα είτε είναι ένα μη τετριμμένο πολλαπλάσιο της. Το βασικό εργαλείο για τη κατασκευή του πίνακα M είναι οι μεικτές υποδιαιρέσεις [Canny-Emiris].

Ορισμός 1.2.8. Μια πολυεδρική υποδιαίρεση ενός πολυτόπου Q είναι μια συλλογή από πλήρους διάστασης πολύτοπα Q_i τα οποία διαμερίζουν το Q και ανά δύο τέμνονται σε μια κοινή τους όψη (πιθανώς κενή).

Ορισμός 1.2.9. Έστω ένα πολύτοπο $P = P_1 + \cdots + P_m \subset \mathbb{R}^n$ διάστασης n. Μια μεικτή υποδιαίρεση S του P είναι μια συλλογή από πολύτοπα $R_i, i = 1, \ldots, k$, διάστασης n, τα κελιά μέγιστης διάστασης της υποδιαίρεσης, που ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

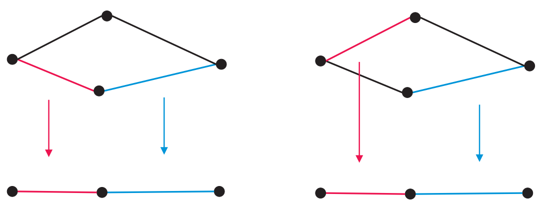
1. Για κάθε $i \neq j$, η $R_i \cap R_j$ είναι μια κοινή έδρα (πιθανώς κενή) των R_i, R_j,
2. Τα R_i αποτελούν μια διαμέριση του P, δηλαδή $P = R_1 \cup \cdots \cup R_k$,
3. Κάθε κελί R_i γράφεται ως Minkowski άθροισμα υποσυνόλων των P_j: $R_i = F_{i1} + \cdots + F_{im}$, $F_{ij} \subset P_j$ και ισχύει $n = dim(P) = dim(R_i) \leq dim(F_{i1}) + \cdots + dim(F_{im})$.

Αν στην προηγούμενη σχέση ισχύει ισότητα, τότε η μεικτή υποδιαίρεση καλείται λεπτή (fine, tight). Ισοδύναμα, μια μεικτή υποδιαίρεση καλείται λεπτή αν κάθε μεικτό κελί της δεν περιέχει ως γνήσιο υποσύνολο του ένα άλλο μεικτό κελί.

Αν S, S' είναι δυο μεικτές υποδιαιρέσεις ενός πολυτόπου $P = P_1 + \cdots + P_m \subset \mathbb{R}^n$, θα λέμε ότι η S εκλεπταίνει (refines) την S' και θα γράφουμε $S \leq S'$, αν για κάθε μεικτό κελί $R = \sum F_i$ της S, υπάρχει ένα μεικτό κελί $R' = \sum F_i'$ της S', ώστε $F_i \subseteq F_i'$ για κάθε i. Το σύνολο των μεικτών υποδιαιρέσεων του πολυτόπου R με τη σχέση εκλέπτυνσης $(\leq)$, είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο (poset). Τα ελαχιστικά στοιχεία του συνόλου αυτού είναι οι λεπτές μεικτές υποδιαιρέσεις και γι' αυτές ισχύει ότι κάθε κελί τους είναι Minkowski άθροισμα απλόκων. Το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο είναι η τετριμμένη μεικτή υποδιαίρεση P. Οι λεπτές μεικτές υποδιαιρέσεις είναι για τις μεικτές υποδιαιρέσεις το ανάλογο των τριγωνοποιήσεων για τις πολυεδρικές υποδιαιρέσεις.

Μια μεικτή υποδιαίρεση S του πολυτόπου $P = P_1 + \cdots + P_n$, είναι κανονική (regular), αν υπάρχει μια συνάρτηση ανύψωσης (lifting function) $\omega : P \to \mathbb{R}$, τέτοια που η S να είναι η προβολή των όψεων του κάτω (ισοδύναμα του άνω) περιβλήματος του συνόλου $\sum \widehat{P}_i$, όπου $\widehat{P}_i = \{(a, \omega(a)) | a \in P_i\}$. Το διάνυσμα w με συντεταγμένες τα $\omega(a)$, καλείται διάνυσμα βαρών (weight vector) της υποδιαίρεσης. Αν η συνάρτηση ανύψωσης ω είναι γενική (generic), τότε η επαγόμενη κανονική μεικτή υποδιαίρεση είναι λεπτή.

Στη συνέχεια θα γράφουμε μεικτή υποδιαίρεση εννοώντας κανονική λεπτή μεικτή υποδιαίρεση.



Σχήμα 1.3: Κατασκευή μιας κανονικής (a) και μιας όχι κανονικής (b) μεικτής υποδιαίρεσης μέσω μιας συνάρτησης ανύψωσης.

Ορισμένα κελιά μιας μεικτής υποδιαίρεσης έχουν ιδιαίτερη σημασία.

Ορισμός 1.2.10. Ένα κελί $R = F_1 + \cdots + F_m,\ F_i \subset P_i$, μιας μεικτής υποδιαίρεσης του πολυτόπου $P = P_1 + \cdots + P_m \subset \mathbb{R}^n$ καλείται μεικτό κελί αν $dim(F_i) \leq 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$.

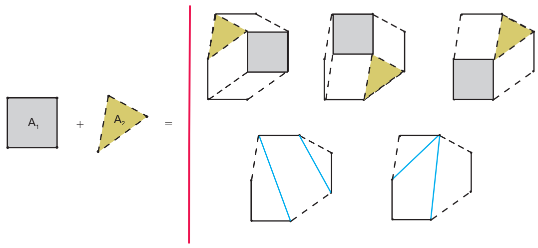
Επομένως, αν $m = n$, δηλαδή $P = P_1 + \cdots + P_n$, τότε κάθε μεικτό κελί R_i γράφεται ως Minkowski άθροισμα ακμών των P_i $(dim(F_i) = 1)$. Στην περίπτωση που τα P_i είναι τα πολύτοπα του Νεύτωνα $n+1$ Laurent πολυωνύμων $f_0, f_1, \ldots, f_n$ σε n μεταβλητές, κάθε μεικτό κελί θα είναι της μορφής $R = F_0 + \cdots + F_i + \cdots + F_n$, όπου $dim(F_i) = 0$ και $dim(F_j) = 1,\ j \neq i$, και καλείται μεικτό τύπου i.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει τη χρησιμότητα των μεικτών υποδιαιρέσεων.

Θεώρημα 1.2.7. *[4] Έστω $P_1, \dots, P_n$ πολύτοπα στον $\mathbb{R}^n$ και S μια μεικτή υποδιαίρεση του αθροίσματος Minkowski $P = P_1 + \cdots + P_n$. Τότε ο μεικτός όγκος $MV(P_1, \dots, P_n)$ υπολογίζεται από τον τύπο*

$$MV(P_1, \dots, P_n) = \sum_R \mathrm{Vol}(R), \tag{1.8}$$

όπου το άθροισμα είναι πάνω σε όλα τα μεικτά κελιά R της S.



Σχήμα 1.4: Μεικτές και μη μεικτές υποδιαιρέσεις.

Μια άλλη εφαρμογή των μεικτών υποδιαιρέσεων του αθροίσματος Minkowski $n+1$ πολυτόπων, είναι στον υπολογισμό της τορικής απαλοίφουσας του αντίστοιχου συστήματος πολυωνύμων, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω.

Προφανώς, για κάθε πολύτοπο $P = P_0 + \ldots + P_n$ υπάρχουν πολλές μεικτές υποδιαιρέσεις οι οποίες κατασκευάζονται από διαφορετικές συναρτήσεις ανύψωσης. Αρκετές από αυτές έχουν τα ίδια μεικτά κελιά. Θα χωρίσουμε το σύνολο των μεικτών υποδιαιρέσεων του P σε κλάσεις ισοδυναμίας που καλούνται διαμορφώσεις μεικτών κελιών (mixed-cell configurations) [15, 18]. Κάθε διαμόρφωση μεικτών κελιών περιέχει όλες τις μεικτές υποδιαιρέσεις οι οποίες έχουν τα ίδια μεικτά κελιά, επομένως αν ενδιαφερόμαστε μόνο για τα μεικτά κελιά μιας υποδιαίρεσης, αρκεί να μελετήσουμε μόνο τις διαμορφώσεις μεικτών κελιών.

Υπάρχει μια στενή σχέση μεταξύ των διαμορφώσεων μεικτών κελιών του πολυτόπου $P = P_0 + \cdots + P_n$ και μερικών μονωνύμων. Έστω η απαλείφουσα $\mathcal{R}$ του συστήματος των πολυωνύμων

$$f_i = \sum_{a_j \in A_i} c_{ij} \mathrm{x}^{a_j}, \; i = 0, \dots, n, \; j = 1, \dots, |A_i|, \tag{1.9}$$

όπου $N(f_i) = P_i = conv(A_i)$.

Τα μονώνυμα της απαλείφουσας τα οποία αντιστοιχούν σε κορυφές του πολυτόπου του Νεύτωνα $N(\mathcal{R})$, καλούνται ακραία (extreme monomials).

Η απαλοίφουσα $\mathcal{R}$ του συστήματος (1.9) είναι ένα πολυώνυμο στους συμβολικούς συντελεστές c_{ij} των f_i. Επομένως κάθε μονώνυμο της $\mathcal{R}$, είναι της μορφής $\prod c_{i,a}^{v_{i,a}}$. Μπορούμε να ταυτίσουμε το μονώνυμο αυτό με το διάνυσμα των εκθετών του $(\dots, v_{i,a}, \dots)$. Για κάθε συνάρτηση συνάρτηση ανύψωσης

ω, υπολογίζουμε την τιμή της στο διάνυσμα των εκθετών του μονωνύμου. Η τιμή αυτή είναι το βάρος (weight) του μονωνύμου ως προς την ω. Η αρχική μορφή (initial form), $init_\omega(\mathcal{R})$, της $\mathcal{R}$ είναι το άθροισμα των μονωνύμων της με μέγιστο βάρος ως προς την ω [18].

Το επόμενο θεώρημα ορίζει μια απεικόνιση του συνόλου των μεικτών υποδιαιρέσεων επί του συνόλου των μονωνύμων της αρχικής μορφής της απαλείφουσας. Η απεικόνιση αυτή γίνεται 1-1 και επί αν την περιορίσουμε στο σύνολο των διαμορφώσεων μεικτών κελιών.

Θεώρημα 1.2.8. *[18] Έστω ότι τα σύνολα στήριξης $A_0, A_1, \ldots, A_n$ των πολυωνύμων $f_0, \ldots, f_n$ είναι ουσιώδη (essential). Τότε η αρχική μορφή της τορικής απαλοίφουσας $\mathcal{R}$, ως προς την γενική (generic) συνάρτηση ανύψωσης ω, είναι ίση με*

$$init_\omega(\mathcal{R}) = const \cdot \prod_{i=0}^{n} \prod_{R} c_{i,F_i}^{\mathrm{Vol}(R)},$$

όπου το δεύτερο γινόμενο είναι πάνω σε όλα τα μεικτά κελιά R, τύπου i, της μεικτής υποδιαίρεσης που επάγεται από την ω και c_{i,F_i} είναι ο συντελεστής του μονωνύμου με εκθέτη το σημείο $F_i \in A_i$. Η σταθερά $const$ είναι +1 ή -1.

Για κάθε γενική συνάρτηση ανύψωσης ω, η αρχική μορφή $init_\omega(\mathcal{R})$ είναι ένα ακραίο μονώνυμο της $\mathcal{R}$. Το μονώνυμο αυτό αντιστοιχεί στην κορυφή του πολυτόπου $N(\mathcal{R})$ η οποία έχει υπερεπίπεδο στήριξης (support hyperplane) με κάθετο διάνυσμα (normal vector) το ω. Αν η ω δεν είναι γενική συνάρτηση, τότε η αρχική μορφή $init_\omega(\mathcal{R})$ αντιστοιχεί σε ένα πολυώνυμο το οποίο είναι γινόμενο απαλοιφουσών συστημάτων με σύνολα στήριξης, υποσύνολα των A_i (Θεώρημα 4.1 [18]). Η ω, στη περίπτωση αυτή είναι το κάθετο διάνυσμα σε ένα υπερεπίπεδο στήριξης κάποιας έδρας του πολυτόπου $N(\mathcal{R})$.

Είναι φανερό πως για κάθε γενική (generic) συνάρτηση ανύψωσης ω, υπολογίζουμε και μια κορυφή (όχι απαραίτητα διαφορετική) του πολυτόπου του Νεύτωνα της απαλοίφουσας, η οποία έχει κάθετο διάνυσμα το ω. Έτσι το θεώρημα 1.2.8 μας παρέχει έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό του πολυτόπου του Νεύτωνα $N(\mathcal{R})$, της απαλοίφουσας: κατασκεύασε όλες τις μεικτές υποδιαιρέσεις του αθροίσματος Minkowski των πολυτόπων του Νεύτωνα των πολυωνύμων του συστήματος και χρησιμοποιώντας το θεώρημα 1.2.8, υπολόγισε τα ακραία μονώνυμα της απαλείφουσας. Το $N(\mathcal{R})$ είναι η κυρτή θήκη των σημείων αυτών.

Κάθε κορυφή του $N(\mathcal{R})$ που αντιστοιχεί σε ένα ακραίο μονώνυμο της $\mathcal{R}$, έχει πολλά κάθετα διανύσματα ω. Χρησιμοποιώντας κάποια αυτά ως συναρτήσεις ανύψωσης για τη κατασκευή μιας μεικτής υποδιαίρεσης, θα υπολογίζουμε μέσω του θεωρήματος 1.2.8 πάντα το ίδιο ακραίο μονώνυμο. Επομένως ο παραπάνω αλγόριθμος είναι αναποτελεσματικός αφού βασίζεται στην απεικόνιση των μεικτών υποδιαιρέσεων στα ακραία μονώνυμα της $\mathcal{R}$, η οποία όμως δεν είναι 1-1. Χρησιμοποιώντας την 1-1 και επί αντιστοιχία των διαμορφώσεων μεικτών κελιών και των ακραίων μονωνύμων μπορούμε να τροποποιήσουμε τον αλγόριθμο ώστε να υπολογίζει μόνο κλάσεις ισοδυναμίας μεικτών υποδιαιρέσεων. Η κατασκευή αυτή αναπτύσσεται στο κεφάλαιο 4.

Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό με ένα θεώρημα που αφορά στη διάσταση του πολυτόπου $N(\mathcal{R})$.

Θεώρημα 1.2.9. *[18] Η διάσταση του πολυτόπου του Νεύτωνα $N(\mathcal{R})$ της απαλοίφουσας των πολυωνύμων f_i, $i = 0, \ldots, n$, είναι $m - 2n - 1$, όπου $m = \sum_{i=0}^{n} |A_i|$.*

Κεφάλαιο 2

Τριγωνοποιήσεις

2.1 Εισαγωγή

Έστω A, ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων[1] στον $\mathbb{R}^n$ και $P = conv(A)$, η κυρτή θήκη του. Ένα άπλοκο (simplex) στον $\mathbb{R}^n$ είναι η κυρτή θήκη ενός ομοπαραλληλικά ανεξάρτητου (affinely independent) συνόλου, πληθικότητας $n+1$, π.χ. ένα ευθύγραμμο τμήμα στον $\mathbb{R}$, ένα τρίγωνο στον $\mathbb{R}^2$, ένα τετράεδρο στον $\mathbb{R}^3$ κ.τ.λ.

Ορισμός 2.1.1. Μια τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του A είναι μια πεπερασμένη συλλογή από άπλοκα $T_1, \ldots, T_k \subset P$, τα *κελιά* της τριγωνοποίησης, τέτοια που

1. $dim(T_i) = n$, για κάθε $i = 1, \ldots, k$,
2. $\cup_{i=1}^{n} T_i = P$,
3. Για κάθε $i \neq j$, η $T_i \cap T_j$ είναι μια κοινή έδρα (πιθανώς κενή) των T_i, T_j.

Μια τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του συνόλου A, είναι κανονική (regular), αν υπάρχει μια γενική (generic) συνάρτηση ανύψωσης (lifting function) $\omega : A \to \mathbb{R}$, τέτοια που η $\mathcal{T}$ να είναι η προβολή των όψεων του κάτω (ισοδύναμα του άνω) περιβλήματος του συνόλου $\widehat{A} = \{(a, \omega(a)) | a \in A\}$ στο $conv(A)$. Το διάνυσμα w με συντεταγμένες τα $\omega(a)$, καλείται διάνυσμα βαρών (weight vector) της τριγωνοποίησης.

Παρατήρηση 2.1.1. Μια τριγωνοποίηση ενός συνόλου A δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιεί όλα τα σημεία του A. Για παράδειγμα αν $A \subset \mathbb{R}$, υπάρχει μια τριγωνοποίηση του A που αποτελείται από ένα μόνο άπλοκο, το ευθύγραμμο τμήμα $conv(A)$, και χρησιμοποιεί μόνο τα σημεία που ορίζουν τα άκρα του. Αν μια τριγωνοποίηση χρησιμοποιεί όλα τα σημεία στο A θα καλείται επικαλύπτουσα (spanning).

Μια τριγωνοποίηση ενός πολυτόπου P, είναι μια τριγωνοποίηση του συνόλου των κορυφών του. Αν το πολύτοπο P είναι ένα $n-$γωνο, τότε ο αριθμός

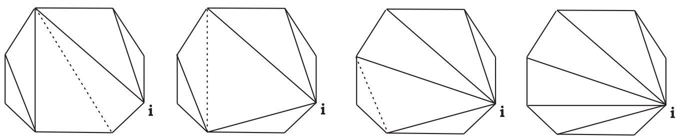
[1] Τα σημεία του συνόλου A δεν είναι απαραίτητα όλα διακεκριμένα.

t_n των τριγωνοποιήσεων του είναι ίσος με τον $(n-2)-$οστό Catalan αριθμό

$$t_n = C_{n-2} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}.$$

Το σύνολο όλων των τριγωνοποιήσεων ενός $n-$γώνου χαρακτηρίζεται από σχέσεις που συνδέουν τα μέλη του. Κάθε εσωτερική ακμή μιας τριγωνοποίησης $\mathcal{T}_i$ του $n-$γώνου, είναι μια διαγώνιος ενός τετραπλεύρου που σχηματίζεται από δυο τρίγωνα (κελιά) της $\mathcal{T}_i$. Μπορούμε αλλάζοντας την διαγώνιο αυτή με την δεύτερη διαγώνιο του τετραπλεύρου, να κατασκευάσουμε μια τριγωνοποίηση $\mathcal{T}_j$ που διαφέρει το λιγότερο δυνατό από την $\mathcal{T}_i$. Η διαδικασία αυτή καλείται αντιστροφή ακμής (edge flip).

Μπορούμε επομένως να θεωρήσουμε τον γράφο που έχει ως κορυφές τις τριγωνοποιήσεις του $n-$γώνου και ως ακμές τις αντιστροφές ακμών. Ο γράφος καλείται γράφος αντιστροφών ακμών (flip graph) των τριγωνοποιήσεων του $n-$γώνου. Εφόσον για κάθε εσωτερική διαγώνιο του $n-$γώνου υπάρχει και μια αντιστροφή ακμής, έπεται ότι ο βαθμός του γράφου είναι $n-3$, δηλαδή κάθε τριγωνοποίηση έχει ακριβώς $n-3$ αντιστροφές ακμών. Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο γράφος είναι συνδεδεμένος, δηλαδή από οποιαδήποτε τριγωνοποίηση υπάρχει μια ακολουθία από αντιστροφές ακμών η οποία οδηγεί σε οποιαδήποτε άλλη: μια τριγωνοποίηση του $n-$γώνου καλείται i-τυπική (i-th standard) αν κάθε τρίγωνο της έχει κορυφή την i. Για κάθε άλλη τριγωνοποίηση εκτός της i-τυπικής, υπάρχει μια αντιστροφή ακμής η οποία αυξάνει τον βαθμό της κορυφής i. Σε κάθε τρίγωνο ijk αντιστρέφουμε την διαγώνιο jk, όπου οι j,k δεν είναι διαδοχικές κορυφές. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Αντιστροφές ακμών που οδηγούν στην i-τυπική τριγωνοποίηση.

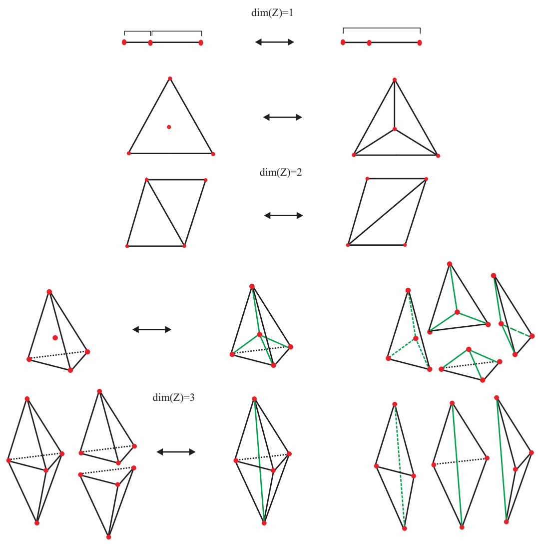
Ο γράφος των τριγωνοποιήσεων του $n-$γώνου είναι ένα πολύτοπο διάστασης $n-3$ και ονομάζεται associahedron. Είναι ειδική περίπτωση μιας κατηγορίας γράφων που ορίζονται για κάθε σύνολο σημείων A και καλούνται δευτερεύοντα πολύτοπα (secondary polytopes). Θα ορίσουμε αυστηρά τα δευτερεύοντα πολύτοπα στη συνέχεια.

Οι τριγωνοποιήσεις ενός συνόλου σημείων A στο επίπεδο έχουν ορισμένες καλές ιδιότητες που διευκολύνουν τη μελέτη τους. Για παράδειγμα αντιστοιχούν σε ένα συνδεδεμένο γράφο, το δευτερεύον πολύτοπο. Για σύνολα σημείων σε χώρους μεγαλύτερων διαστάσεων, ακόμα και στον $\mathbb{R}^3$, τέτοια αποτελέσματα δεν ισχύουν. Αν όμως περιοριστούμε στο σύνολο των κανονικών τριγωνοποιήσεων, μπορούμε να εξάγουμε ανάλογα αποτελέσματα.

Για σύνολα σημείων σε χώρους τυχαίας διάστασης, η έννοια της αντιστροφής ακμής της διαγωνίου ενός πολυγώνου, γενικεύεται σε μια αντίστοιχη έννοια τοπικού μετασχηματισμού που οδηγεί από μια τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ σε μια άλλη $\mathcal{T}'$, ώστε οι δυο τριγωνοποιήσεις να διαφέρουν το λιγότερο δυνατό.

2.2 Κυκλώματα

Το κατάλληλο συνδυαστικό εργαλείο για να ορίσουμε τους τοπικούς μετασχηματισμούς μιας τριγωνοποίησης ενός συνόλου σημείων $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι το κύκλωμα (circuit). Ένα κύκλωμα Z είναι ένα ελάχιστο ομοπαραλληλικά εξαρτημένο (minimal affinely dependent) υποσύνολο του A. Επομένως κάθε γνήσιο υποσύνολο του Z είναι ένα άπλοκο κάποιας διάστασης μικρότερης ή ίσης του n. Για παράδειγμα ένα κύκλωμα πλήρους διάστασης στον $\mathbb{R}$ είναι ένα σύνολο τριών συνευθειακών σημείων, στον $\mathbb{R}^2$ ένα σύνολο από τρία σημεία και ένα που δεν βρίσκεται στις πλευρές του τριγώνου που ορίζουν τα υπόλοιπα, στον $\mathbb{R}^3$ ένα σύνολο τεσσάρων σημείων που σχηματίζουν ένα τετράεδρο και ένα σημείο το οποίο δεν ανήκει σε κάποια από τις όψεις του κ.τ.λ. (βλ. Σχήμα 2.2). Αν τα σημεία του A είναι σε *γενική θέση*[2], τότε ένα κύκλωμα είναι ένα υποσύνολο του A πληθικότητας $n+2$.



Σχήμα 2.2: Κυκλώματα πλήρους διάστασης στον $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ και οι αντίστοιχες τριγωνοποιήσεις τους.

Υπάρχει μια μοναδική (μέχρις πολλαπλασιασμού με θετικό πραγματικό αριθμό) ομοπαραλληλική σχέση μεταξύ των στοιχείων του Z :

$$\sum_{z \in Z} \gamma_z z = 0 \quad \mu\varepsilon \quad \sum_{z \in Z} \gamma_z = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \gamma_z \neq 0,\ \forall z \in Z.$$

[2] Ένα σύνολο σημείων στον $\mathbb{R}^n$ είναι σε γενική θέση αν κάθε $n+1$ σημεία του είναι ομοπαραλληλικά ανεξάρτητα (ισοδύναμα, αν έχουν κυρτή θήκη διάστασης n).

Πρόταση 2.2.1. *[9] Κάθε κύκλωμα Z έχει ακριβώς δυο τριγωνοποιήσεις*

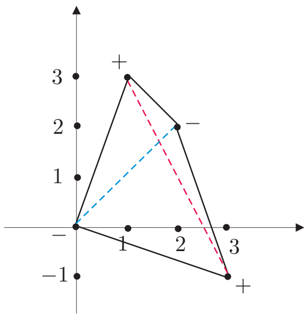
$$\mathcal{T}_+ = \{conv(Z \setminus \{z\}) \mid \gamma_z > 0\} \quad \textit{και} \quad \mathcal{T}_- = \{conv(Z \setminus \{z\}) \mid \gamma_z < 0\}.$$

Επιπλέον και οι δυο είναι κανονικές.

Παράδειγμα 2.2.1. Έστω το κύκλωμα $Z = \{(0,0),(1,3),(2,2),(3,-1)\}$ με αντίστοιχο διάνυσμα $\gamma = (-1,+4,-5,+2)$. Οι τριγωνοποιήσεις του είναι οι

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_+ &= \{conv(Z \setminus (1,3)),\ conv(Z \setminus (3,-1))\}, \\ \mathcal{T}_- &= \{conv(Z \setminus (0,0)),\ conv(Z \setminus (2,2))\} \end{aligned}$$

όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Οι τριγωνοποιήσεις του κυκλώματος Z του παραδείγματος 2.2.1.

Θα χρησιμοποιήσουμε τα κυκλώματα για να ορίσουμε τους τοπικούς μετασχηματισμούς σε μια τριγωνοποίηση του συνόλου σημείων A, γενικεύοντας την διαδικασία που ακολουθήσαμε στις τριγωνοποιήσεις πολυγώνων. Η βασική ιδέα είναι ότι μπορούμε να μετασχηματίσουμε τοπικά μια τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του A, επιλέγοντας ένα κατάλληλο κύκλωμα Z του A και αντικαθιστώντας την τριγωνοποίηση του Z που επάγεται από την $\mathcal{T}$, με την συμμετρική της. Με τον τρόπο αυτό παράγουμε μια τριγωνοποίηση $\mathcal{T}'$ η οποία διαφέρει το λιγότερο δυνατό από τη $\mathcal{T}$ (βλ. σχήμα 2.4).

Ο επόμενος ορισμός χαρακτηρίζει τα κυκλώματα που μας ενδιαφέρουν.

Ορισμός 2.2.1. [15] Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα σύνολο σημείων, $Z \subset A$ ένα κύκλωμα και $\mathcal{T}$ μια τριγωνοποίηση του A. Η $\mathcal{T}$ θα στηρίζεται (supported) στο Z αν υπάρχουν $Y_1, \ldots, Y_s$, υποσύνολα του A ($s \geq 1$) και μια τριγωνοποίηση $\mathcal{T}_\pm$ του Z (η οποία θα είναι η $\mathcal{T}_+$ ή η $\mathcal{T}_-$) τέτοια που:

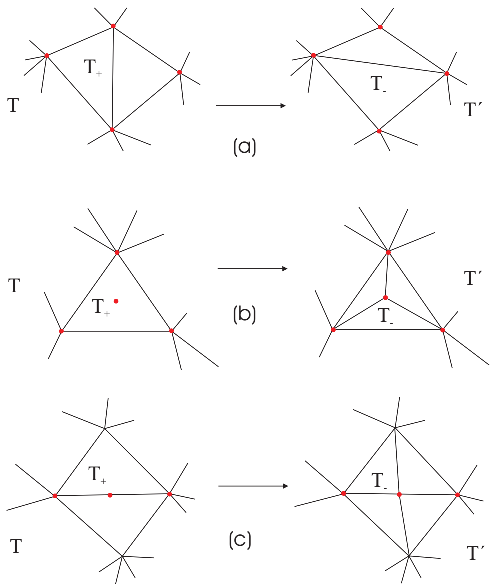
1. Για κάθε κελί (δηλαδή άπλοκο μέγιστης διάστασης) I της $\mathcal{T}_\pm$ και για κάθε κελί J της $\mathcal{T}$ ισχύει: $I \subset J \Rightarrow (\exists i \in \{1,2,\ldots,s\} : J = Y_i \cup I)$,
2. Για κάθε $i \in \{1,2,\ldots,s\}$ και για κάθε κελί I της $\mathcal{T}_\pm$, ισχύει: $Y_i \cup I \in \mathcal{T}$.

Ένας ισοδύναμος αλλά πιο διαισθητικός ορισμός είναι ο επόμενος.

Ορισμός 2.2.2. [9] Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα σύνολο σημείων, $Z \subset A$ ένα κύκλωμα και $\mathcal{T}$ μια τριγωνοποίηση του A. Η $\mathcal{T}$ θα στηρίζεται (supported) στο Z αν ισχύουν τα παρακάτω:

1. Δεν υπάρχουν κορυφές απλόκων της $\mathcal{T}$ μέσα στο $conv(Z)$ εκτός από τα σημεία του Z,
2. Το πολύτοπο $conv(Z)$ είναι ένωση εδρών των απλόκων της $\mathcal{T}$,
3. Αν $conv(I)$ και $conv(I')$ είναι δυο κελιά μιας από τις δυο δυνατές τριγωνοποιήσεις του $conv(Z)$, τότε για κάθε υποσύνολο $Y \subset A \setminus Z$, το άπλοκο $conv(I \cup Y)$ εμφανίζεται στη $\mathcal{T}$ αν και μόνο αν το $conv(I' \cup Y)$ εμφανίζεται στη $\mathcal{T}$.

Αν $|Z| = n + 2$, δηλαδή η διάσταση του Z είναι n, τότε η συνθήκη (3) του Ορισμού 2.2.2 προκύπτει από την (2). Η συνθήκη (3) είναι απαραίτητη στην περίπτωση που τα σημεία του A δεν είναι σε γενική θέση, οπότε μπορούμε να έχουμε κυκλώματα μικρότερης διάστασης από n. Αν για το A ισχύει η υπόθεση γενικής θέσης, τότε ένα κύκλωμα Z είναι η ένωση n το πολύ απλόκων τα οποία τέμνονται ανά δύο σε μια κοινή τους όψη. Τα άπλοκα αυτά ανήκουν και στην αντίστοιχη τριγωνοποίηση του A.



Σχήμα 2.4: Τοπικοί μετασχηματισμοί μέσω ενός κυκλώματος Z πλήρους διάστασης (a),(b) και μικρότερης διάστασης (c).

Αν $\mathcal{T}$ είναι μια τριγωνοποίηση του A που στηρίζεται σε ένα κύκλωμα Z, τότε η $\mathcal{T}$ επάγει μια τριγωνοποίηση του Z η οποία είναι μια από τις $\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_-$. Έστω ότι είναι η $\mathcal{T}_+$. Θα συμβολίζουμε με $\text{flip}_Z(\mathcal{T})$ τη τριγωνοποίηση που παίρνουμε αντικαθιστώντας όλα τα άπλοκα της μορφής $conv(I \cup Y)$, όπου $conv(I) \in \mathcal{T}_+$, με τα άπλοκα της μορφής $conv(I' \cup Y)$, όπου $conv(I') \in \mathcal{T}_-$ (βλ. σχήμα 2.4). Προφανώς και η νέα τριγωνοποίηση $\mathcal{T}' = \mathrm{flip}_Z(\mathcal{T})$, ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 2.2.2, επομένως και αυτή θα στηρίζεται στο Z και ισχύει $\mathrm{flip}_Z(\mathcal{T}') = \mathcal{T}$.

Πιο αυστηρά η παραπάνω διαδικασία δίνεται από τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.2.3. Έστω $\mathcal{T}$ τριγωνοποίηση του A, $Z \subset A$ ένα κύκλωμα στο οποίο στηρίζεται η $\mathcal{T}$ και $Y_1, \dots, Y_s$ όπως στον Ορισμό 2.2.1. Αν η $\mathcal{T}$ επάγει την τριγωνοποίηση $\mathcal{T}_+$ στο Z, τότε η αντιστροφή ακμής (bistellar flip) της $\mathcal{T}$ στο Z είναι ο μετασχηματισμός που ορίζεται ως:

$$\mathrm{flip}_Z(\mathcal{T}) = (\mathcal{T} \setminus \{Y_i \cup I | 1 \leq i \leq s,\ I \in \mathcal{T}_+\}) \cup \{Y_i \cup I | 1 \leq i \leq s,\ I \in \mathcal{T}_-\}.$$

Ορισμός 2.2.4. Αν $J \in \mathcal{T}$, είναι ένα κελί της $\mathcal{T}$, θα λέμε ότι το Z σχετίζεται με το (involves) J αν $J \notin \mathrm{flip}_Z(\mathcal{T})$.

Αν το Z σχετίζεται με το J, τότε ο flip_Z καταστρέφει το J και δίνει τα κελιά της $\mathrm{flip}_Z(\mathcal{T})$ που δεν υπάρχουν στην $\mathcal{T}$. Η εφαρμογή του flip_Z στην τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του A θα μας δώσει μια νέα τριγωνοποίηση του A. Όμως αν η $\mathcal{T}$ είναι κανονική (regular), δεν ισχύει πάντα ότι και η $\mathrm{flip}_Z(\mathcal{T})$ είναι κανονική. Έτσι μετά από κάθε εφαρμογή του τελεστή flip_Z πρέπει να ελέγχουμε την κανονικότητα της τριγωνοποίησης.

2.3 Δευτερεύον Πολύτοπο

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε το δευτερεύον πολύτοπο ενός πεπερασμένου συνόλου σημείων A στον $\mathbb{R}^n$.

Σε κάθε τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του A αντιστοιχούμε ένα διάνυσμα $\phi_{\mathcal{T}}$, το διάνυσμα όγκων (volume vector), που ορίζεται ως:

$$\phi_{\mathcal{T}} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{|A|}), \quad \varphi_i = \sum_{\sigma \in \mathcal{T},\ v_i \in \sigma} \mathrm{Vol}(\sigma), \tag{2.1}$$

όπου το φ_i ισούται με το άθροισμα των όγκων όλων των απλόκων μέγιστης διάστασης σ της $\mathcal{T}$ που έχουν το v_i ως κορυφή.

Παρατήρηση 2.3.1. Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι $\sum_{i=1}^{|A|} \varphi_i = (n+1)\mathrm{Vol}(P)$, όπου $P = conv(A)$.

Ορισμός 2.3.1. Το δευτερεύον πολύτοπο (secondary polytope) $\Sigma(A)$, του συνόλου σημείων $A \subset \mathbb{R}^n$, είναι το κυρτό περίβλημα[3] των διανυσμάτων όγκων $\phi_{\mathcal{T}}$, όλων των τριγωνοποιήσεων του A.

[3]Στον χώρο $\mathbb{R}^A$ των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το A.

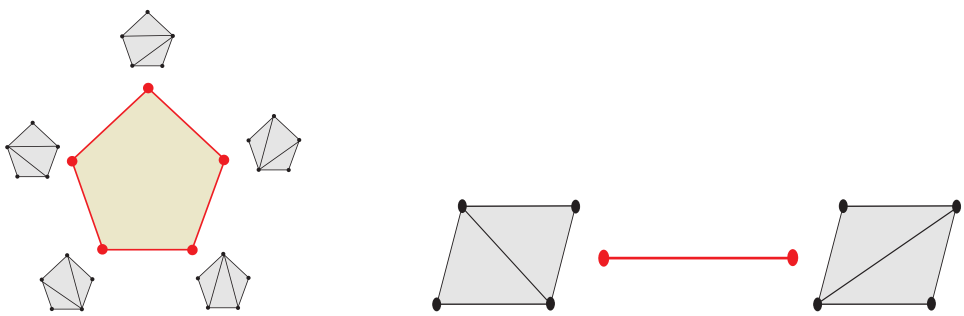
Παρατήρηση 2.3.2. Ο παραπάνω ορισμός του δευτερεύοντος πολυτόπου $\Sigma(A)$ δόθηκε από τους Gel'fand, Kapranov και Zelevinskii και για κάθε τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του A δίνει τις συντεταγμένες της αντίστοιχης κορυφής $v_{\mathcal{T}}$ του $\Sigma(A)$ μέσω των διανυσμάτων όγκων. Ένας διαφορετικός αλλά ισοδύναμος ορισμός δόθηκε από τους Billera και Sturmfels στο [2] και περιγράφει το πολύτοπο $\Sigma(A)$ ως ολοκλήρωμα των στοιβάδων (fibers) της προβολής $\pi : \Delta_A \rightarrow conv(A)$, όπου Δ_A είναι ένα άπλοκο με $|A|$ κορυφές και η π είναι η 1-1 και επί απεικόνιση των κορυφών του Δ_A στο A.

Το σύνολο των κανονικών τριγωνοποιήσεων ενός συνόλου σημείων $A \subset \mathbb{R}^n$ συνδέεται μέσω μιας 1-1 και επί αντιστοιχίας με τις κορυφές του δευτερεύοντος πολυτόπου $\Sigma(A)$. Σχετικά έχουμε το επόμενο Θεώρημα:

Θεώρημα 2.3.1. *[9] Για κάθε σύνολο σημείων A υπάρχει ένα πολύτοπο $\Sigma(A)$ τέτοιο που:*

1. *Η διάσταση του $\Sigma(A)$ είναι $|A| - n - 1$.*
2. *Οι κορυφές του $\Sigma(A)$ είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τις κανονικές τριγωνοποιήσεις του A.*
3. *Δυο κορυφές k_1, k_2 του $\Sigma(A)$ με αντίστοιχες τριγωνοποιήσεις $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2$, συνδέονται με μια ακμή αν και μόνο αν υπάρχει ένα κύκλωμα $Z \subset A$ στο οποίο στηρίζεται η $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2 = \mathrm{flip}_Z(\mathcal{T}_1)$.*

Τα διανύσματα όγκων μη κανονικών τριγωνοποιήσεων ή κανονικών υποδιαιρέσεων, αντιστοιχούν σε σημεία στο εσωτερικό του $\Sigma(A)$ ή σε σημεία στο εσωτερικό κάποιας έδρας του.



Σχήμα 2.5: Δευτερεύοντα πολύτοπα ενός πενταγώνου και ενός τετραπλεύρου.

Κεφάλαιο 3

Απαρίθμηση των κανονικών τριγωνοποιήσεων

3.1 Τέχνασμα Cayley

Όπως αναφέρεται στο κεφάλαιο 1, ο υπολογισμός του πολυτόπου του Νεύτωνα της απαλοίφουσας ενός συστήματος πολυωνύμων $f_0, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, με σύνολα στήριξης $A_0, A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$, ανάγεται στον υπολογισμό όλων των κανονικών λεπτών μεικτών υποδιαιρέσεων του αθροίσματος Minkowski $P = P_0 + \cdots + P_n$, όπου $P_i = conv(A_i)$.

Μέσω μιας αντιστοίχισης, γνωστής ως τέχνασμα Cayley (Cayley trick), ο υπολογισμός όλων των κανονικών λεπτών μεικτών υποδιαιρέσεων του P ανάγεται στον υπολογισμό όλων των κανονικών τριγωνοποιήσεων ενός νέου συνόλου C.

Ορισμός 3.1.1. Η εμφύτευση Cayley κ, των πολυτόπων $P_0, \ldots, P_n$, ορίζεται ως

$$C := \kappa\left(P_0, P_1, \ldots, P_n\right) = conv\left(\bigcup_{i=0}^{n}(P_i \times \{e_i\})\right) \subset \mathbb{R}^{2n+1},$$

όπου τα e_i είναι μια ομοπαραλληλική βάση του $\mathbb{R}^n$. Η διάσταση του συνόλου $\kappa\left(P_0, P_1, \ldots, P_n\right)$ είναι $2n$.

Για να κατασκευάσουμε το σύνολο C, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως ομοπαραλληλική βάση του $\mathbb{R}^n$ τα διανύσματα $e_0 = (0, \ldots, 0), e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, οπότε $C \subset \mathbb{R}^{2n}$ ή τα διανύσματα $e_i, i = 0, \ldots, n$ της ορθοκανονικής βάσης του $\mathbb{R}^{n+1}$, οπότε $C \subset \mathbb{R}^{2n+1}$.

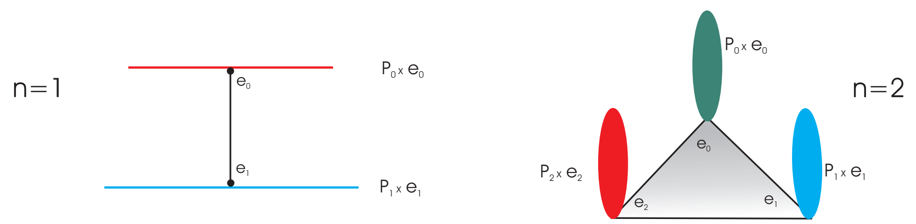
Η εμφύτευση Cayley μπορεί να οριστεί γενικότερα για σύνολα σημείων $A_1, \ldots, A_k \subset \mathbb{R}^n$, ως εξής

$$C := \kappa\left(A_1, \ldots, A_k\right) = \bigcup_{i=0}^{k}(A_i \times \{e_i\}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-1}$$

Το επόμενο θεώρημα εγκαθιστά έναν ισομορφισμό μεταξύ των μερικά διατεταγμένων συνόλων των πολυεδρικών υποδιαιρέσεων του C και των μεικτών υποδιαιρέσεων του συνόλου P.

Θεώρημα 3.1.1. *(Τέχνασμα Cayley)[9] Υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των μεικτών υποδιαιρέσεων του αθροίσματος Minkowski $P = P_0 + \cdots + P_n$ και των πολυεδρικών υποδιαιρέσεων του πολυτόπου $C = \kappa(P_0, \ldots, P_n)$. Η αντιστοιχία αυτή περιορίζεται σε μια αντιστοιχία των κανονικών λεπτών μεικτών υποδιαιρέσεων του P με τις κανονικές τριγωνοποιήσεις του C.*

Η ιδέα του τεχνάσματος Cayley είναι ότι παίρνουμε ένα άπλοκο στον $\mathbb{R}^n$ και τοποθετούμε κάθε P_i πάνω από κάθε κορυφή του, σε ένα χώρο ορθογώνιο προς τον χώρο στον οποίο ανήκει το άπλοκο, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.1 για τις περιπτώσεις $n = 1, 2$. Με τον τρόπο αυτό οι εικόνες των P_i βρίσκονται σε παράλληλα υπερεπίπεδα σε έναν χώρο διάστασης $2n$.



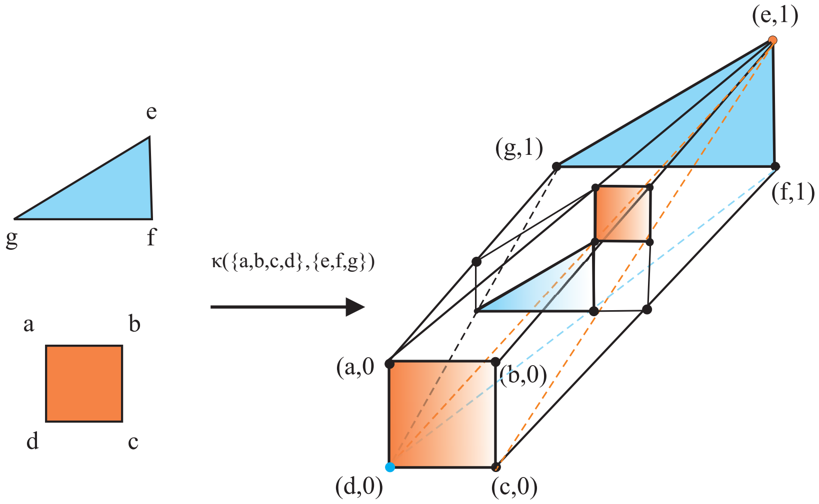
Σχήμα 3.1: Η ιδέα του τεχνάσματος Cayley για $n = 1, 2$.

Αν έχουμε μια κανονική τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του συνόλου C, μπορούμε να βρούμε την αντίστοιχη κανονική λεπτή μεικτή υποδιαίρεση του αθροίσματος Minkowski P, τέμνοντας το C με τον ομοπαραλληλικό υπόχωρο $\mathbb{R}^n \times \{\sum \frac{1}{n+1} e_i\}$ ή με οποιοδήποτε άλλο υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^{2n}$ που δεν είναι υπερεπίπεδο στήριξης κάποιου από τα $k(P_i)$. Ακριβέστερα, στη πρώτη περίπτωση βρίσκουμε μια κανονική λεπτή μεικτή υποδιαίρεση του υπό κλίμακα αθροίσματος Minkowski $\frac{1}{n+1} \sum P_i$ [11, 17].

Τα υποσύνολα της τριγωνοποίησης $\mathcal{T}$ του C που αντιστοιχούν σε κελιά της αντίστοιχης μεικτής υποδιαίρεσης S του P, είναι σύμφωνα με το επόμενο Λήμμα, τα άπλοκα πλήρους διάστασης. Ένα τέτοιο άπλοκο πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο από κάθε σύνολο $P_i \times e_i$ για να τέμνεται από τον ομοπαραλληλικό υπόχωρο $\mathbb{R}^n \times \{\sum \frac{1}{n+1} e_i\}$.

Λήμμα 3.1.2. *[11, Λήμμα 3.2] Το R είναι κελί διάστασης n μιας μεικτής υποδιαίρεσης S, του υπό κλίμακα αθροίσματος Minkowski $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} P_i$ αν και μόνο αν είναι η τομή ενός απλόκου διάστασης $2n$ μιας τριγωνοποίησης $\mathcal{T}$ του C, το οποίο περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο (a_j, e_i) από κάθε σύνολο $A_i \times e_i$.*

Το σχήμα 3.2 αποτελεί ένα παράδειγμα εφαρμογής του τεχνάσματος Cayley για ένα τετράγωνο και ένα τρίγωνο.



Σχήμα 3.2: Η εφαρμογή του τεχνάσματος Cayley στα σύνολα $\{a, b, c, d\}$ και $\{e, f, g\}$.

Το τέχνασμα Cayley ερμηνεύεται αλγεβρικά ως εξής: θεωρούμε τις $n+1$ νέες μεταβλητές $y_0, \ldots, y_n$ και κατασκευάζουμε το πολυώνυμο

$$f = y_0 f_0 + y_1 f_1 + \cdots + y_n f_n.$$

Το σύνολο στήριξης του f είναι το

$$A := \bigcup_{i=0}^{n} P_i \times \{e_i\} \subset \mathbb{Z}^{2n+1}.$$

Η διάσταση του συνόλου αυτού είναι $2n$. Θέτουμε $\mathrm{z} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}), N = 2n+1, m = |A_0| + \cdots + |A_n|$ και θεωρούμε την A-διακρίνουσα D_A [9]. Τότε ισχύει το επόμενο.

Πρόταση 3.1.3. *[9, Πρόταση 1.3.1] Η τορική απαλοίφουσα $\mathcal{R}$ των πολυωνύμων $f_0, \ldots, f_n$ ισούται με την A-διακρίνουσα Δ_A.*

3.2 Ο αλγόριθμος απαρίθμησης

Το τέχνασμα Cayley μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το πολύτοπο του Νεύτωνα της απαλοίφουσας απαριθμώντας όλες τις κανονικές τριγωνοποιήσεις ενός νέου συνόλου. Για το σκοπό αυτό υπάρχουν αρκετές υλοποιήσεις όπως οι PUNTOS [5], TOPCOM [16] κ.α. Χρησιμοποιούμε έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο απαρίθμησης των κανονικών τριγωνοποιήσεων ενός συνόλου σημείων C που οφείλεται στους T. Masada, H. Imai, K. Imai [14],[12].

Ο αλγόριθμος αυτός χρησιμοποιεί μια τεχνική απαρίθμησης που καλείται αντίστροφη αναζήτηση (reverse search) και προτάθηκε από τους Avis και Fukuda [1].

3.2.1 Ο αλγόριθμος της αντίστροφης αναζήτησης

Η αντίστροφη αναζήτηση είναι μια τεχνική απαρίθμησης (κατασκευής) συνόλων μεγάλου πλήθους διακριτών αντικειμένων η οποία μειώνει την κατανάλωση μνήμης. Στη γενική της μορφή, μπορεί να θεωρηθεί ως η εξερεύνηση ενός δέντρου επικάλυψης, του δέντρου αντίστροφης αναζήτησης, ενός γράφου $G = (V, E)$ του οποίου τις κορυφές θέλουμε να απαριθμήσουμε. Οι ακμές του γράφου καθορίζονται από μια σχέση γειτνίασης Adj. Οι ακμές του δέντρου αντίστροφης αναζήτησης, καθορίζονται από μια βοηθητική συνάρτηση. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως μια τοπική συνάρτηση αναζήτησης f σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης που ορίζεται στο σύνολο των κορυφών του G. Υπάρχει έτσι μια κορυφή v^* του G η οποία είναι βέλτιστη. Διαδοχικές εφαρμογές της συνάρτησης f σε κάθε άλλη κορυφή v, παράγουν ένα μοναδικό μονοπάτι από την v στη v^*.

Ισοδύναμα, οι ακμές του δέντρου αντίστροφης αναζήτησης καθορίζονται ορίζοντας μια ολική σχέση διάταξης $<$ των κορυφών του γράφου. Για κάθε κορυφή v, επιλέγουμε από όλες τις γειτονικές της, την κορυφή v' που είναι $<$-μέγιστη. Έτσι παράγεται ένα μονοπάτι από τη v στη v^*.

Το σύνολο όλων αυτών των μονοπατιών ορίζει και το δέντρο αντίστροφης αναζήτησης.

Η συνάρτηση f (η διάταξη $<$) ορίζει στο σύνολο των κορυφών του G μια σχέση γονέα - παιδιού (επιπλέον της σχέσης γειτνίασης), η οποία βελτιώνει τη χωρική πολυπλοκότητα συγκριτικά με άλλες μεθόδους απαρίθμησης όπως η αναζήτηση κατά βάθος και κατά πλάτος (Depth-search-first (DFS), Breadth-search-first (BFS)).

Η αντίστροφη αναζήτηση ξεκινά από τη βέλτιστη κορυφή v^* και κατά την διάρκειά της μόνο οι ακμές του δέντρου αντίστροφης αναζήτησης διατρέχονται. Κάθε φορά που απαριθμείται μια κορυφή, αυτή δίνεται στην έξοδο και δεν αποθηκεύεται γιατί η κορυφή αυτή μπορεί να ανακτηθεί μέσω της f (μέσω της $<$) και επιπλέον μπορούμε να φτάσουμε σε αυτή μέσω ενός μόνο μονοπατιού. Αυτό έχει σημαντικά οφέλη στη χωρική πολυπλοκότητα του αλγόριθμου.

Για την εφαρμογή της αντίστροφης αναζήτησης, πρέπει ο γράφος τις κορυφές του οποίου θα απαριθμήσουμε, να είναι συνδεδεμένος και να γνωρίζουμε ένα άνω φράγμα δ στο μέγιστο βαθμό των κορυφών του. Η σχέση γειτνίασης πρέπει να παράγει σειριακά όλους τους γείτονες κάθε κορυφής χωρίς επαναλήψεις.

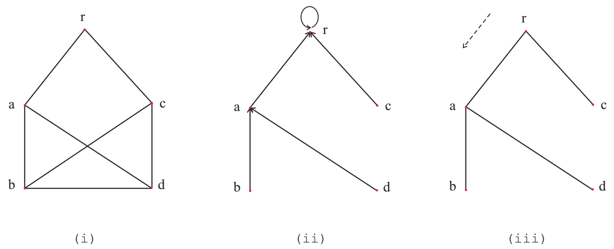
Ο επόμενος ορισμός καθορίζει πότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την αντίστροφη αναζήτηση.

Ορισμός 3.2.1. Το (S, d, Adj, f) είναι μια δομή αντίστροφης αναζήτησης αν ικανοποιεί τα επόμενα:

1. Το S είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και το δ είναι ένας φυσικός αριθμός,
2. $Adj : S \times \{1, \ldots, \delta\} \to S \cup \{0\}$
3. Για κάθε κορυφή v του γράφου και για κάθε $i = 1, \ldots, \delta$, η $Adj(v, i)$ είναι μια γειτονική κορυφή της v ή το μηδέν,
4. Αν για κάποια κορυφή v και $i, j \leq d$ ισχύει $Adj(v, i) = Adj(v, j) \neq 0$, τότε $i = j$,
5. Για κάθε κορυφή v, το $\{Adj(v, i) | Adj(v, i) \neq 0, 1 \leq i \leq \delta\}$ είναι το σύνολο όλων των γειτονικών κορυφών της v,
6. Η $f : S \to S$ είναι η συνάρτηση που δίνει τον γονέα μιας κορυφής, $f(v) = v$ ή $f(v) = Adj(v, i)$, για κάποιο i,
7. Υπάρχει μια μοναδική κορυφή r (η ρίζα του δέντρου), τέτοια που $f(r) = r$. Για κάθε άλλη κορυφή v, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός k τέτοιος που $f^{(k)}(v) = r$.

Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου αντίστροφης αναζήτησης είναι τα εξής: (i) είναι ευαίσθητη εξόδου (output sensitive), επομένως η χρονική πολυπλοκότητά της είναι ανάλογη του μεγέθους της εξόδου επί ένα πολυώνυμο στο μέγεθος της εισόδου και (ii) η χωρική πολυπλοκότητά της είναι πολυωνυμική ως προς το μέγεθος της εισόδου.

Θεώρημα 3.2.1. *[1] Αν ικανοποιούνται οι παραπάνω προϋποθέσεις, τότε η χρονική πολυπλοκότητα της αντίστροφης αναζήτησης είναι $O(\delta \cdot (time(Adj) + time(f)) \cdot |S|)$, όπου $time(Adj)$, $time(f)$ είναι οι χρονικές πολυπλοκότητες της σχέσης Adj και της συνάρτησης f αντίστοιχα. Η μνήμη που απαιτείται είναι διπλάσια του μεγέθους ενός αντικειμένου του συνόλου S.*



Σχήμα 3.3: Παράδειγμα εφαρμογής της αντίστροφης αναζήτησης στο σύνολο σημείων $S = \{a, b, c, d, r\}$: (i) ο γράφος γειτνίασης των σημείων του S, (ii) οι σχέσεις γονέα - παιδιού που ορίζει η συνάρτηση αναζήτησης f και (iii) το δέντρο αντίστροφης αναζήτησης.

3.2.2 Περιγραφή του αλγορίθμου απαρίθμησης των κανονικών τριγωνοποιήσεων

Θα περιγράψουμε τα βασικά σημεία του αλγόριθμου απαρίθμησης των κανονικών τριγωνοποιήσεων με χρήση αντίστροφης αναζήτησης που δίνεται στα [14, 12].

Ο αλγόριθμος που περιγράφεται στο [12], χρησιμοποιεί μια παραλλαγή της βασικής δομής αντίστροφης αναζήτησης υιοθετώντας μια ολική σχέση διάταξης στο σύνολο S.

Ορισμός 3.2.2. Το $(S, d, Adj, <)$ είναι μια δομή αντίστροφης αναζήτησης με ολική διάταξη αν ικανοποιεί τα επόμενα:

1. Το (S, d, Adj) ικανοποιεί τις συνθήκες (1) - (5) του ορισμού 3.2.1,
2. η $<$ είναι μια ολική σχέση διάταξης στο S,
3. Το μοναδικό στοιχείο $r \in S$ που ικανοποιεί την $max_<(\{v \in S | \exists i \; v = Adj(r, i)\} \cup \{r\}) = r$, είναι το μέγιστο ως προς την $<$ στοιχείο του S.

Έστω τα σύνολα στήριξης $A_0, A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ και $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$, όπου $m = |A_0| + \ldots + |A_n|$, το σύνολο που παίρνουμε με την εφαρμογή του τεχνάσματος Cayley. Η διάσταση του συνόλου C είναι $d := 2n$.

Σε κάθε τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του C αντιστοιχεί ένα διάνυσμα όγκων $\phi_{\mathcal{T}} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, όπου $\varphi_i = \sum_{\in\Delta, \; v_i \in \sigma} \mathrm{Vol}(\sigma)$ (βλ. σχέση (2.1), σ.26). Διατάσσουμε ολικά τα διανύσματα όγκων όλων των τριγωνοποιήσεων του C χρησιμοποιώντας τη λεξικογραφική διάταξη[1]. Το δευτερεύον πολύτοπο $\Sigma(C)$ του C είναι το κυρτό περίβλημα των διανυσμάτων αυτών (βλ. ενότητα 2.3).

Οι ακμές του $\Sigma(C)$ αντιστοιχούν σε αντιστροφές ακμών πάνω σε κάποιο κύκλωμα του C. Αν ισχύει η υπόθεση γενικής θέσης, τότε τα κυκλώματα είναι σύνολα από $d + 2$ σημεία που σχηματίζουν άπλοκα τα οποία τέμνονται σε μια κοινή τους όψη. Παρατηρούμε ότι όλα τα κυκλώματα έχουν κυρτή θήκη διάστασης d.

Το επόμενο Λήμμα προκύπτει από το upper bound theorem (McMullen).

Λήμμα 3.2.2. *[12, Λήμμα 10] Αν θεωρήσουμε σταθερή τη διάσταση d, τότε ο αριθμός των απλόκων διάστασης d και ο αριθμός των απλόκων κάθε διάστασης σε μια τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του C, είναι $s_d = O(m^{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor})$ και $s = O(m^{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor})$, αντίστοιχα.*

Η δομή αντίστροφης αναζήτησης για το πρόβλημα της απαρίθμησης όλων των κανονικών τριγωνοποιήσεων του συνόλου C είναι η $(R, \delta, Adj, <)$, όπου R είναι το σύνολο όλων των κανονικών τριγωνοποιήσεων του C, $\delta = O(ds)$ είναι ο μέγιστος αριθμός γειτονικών τριγωνοποιήσεων (ισοδύναμα, ο μέγιστος αριθμός κυκλωμάτων στα οποία μπορεί να στηρίζεται μια τριγωνοποίηση, βλ.

[1] Ένα διάνυσμα $(x_1, \ldots, x_m)$ είναι μικρότερο λεξικογραφικά από ένα διάνυσμα $(y_1, \ldots, y_m)$, αν για κάποιο i, $1 \le i \le m$ ισχύει $x_i < y_i$ και $x_j = y_j$ για κάθε $j < i$.

παρακάτω), $Adj(\mathcal{T}, i)$ =(η i-οστή κανονική τριγωνοποίηση η οποία μπορεί να παραχθεί από την $\mathcal{T}$ με αντιστροφή ακμής σε κάποιο κύκλωμα) και $<$ η ολική διάταξη των τριγωνοποιήσεων που επάγει η λεξικογραφική διάταξη των αντίστοιχων διανυσμάτων όγκων.

Τα απαραίτητα στοιχεία μιας τριγωνοποίησης αναπαρίστανται από τις παρακάτω δομές:

- **Άπλοκα.** *Τα σημεία του C είναι σε γενική θέση.* Κάθε άπλοκο (κελί) μιας τριγωνοποίησης $\mathcal{T}$ του C, είναι ένα σύνολο από $d+1$ σημεία και αναπαρίσταται θεωρητικά από το διάνυσμα των δεικτών των κορυφών του. Κάθε τριγωνοποίηση αναπαρίσταται από ένα γράφο με κόμβους τα άπλοκά της και ακμές τις κοινές τους όψεις. Οι κοινές όψεις των απλόκων αναπαριστούν τις σχέσεις πρόσπτωσης μεταξύ τους.

  Κάθε κοινή τέτοια όψη είναι ένα άπλοκο d σημείων και την αναπαριστούμε με τα δυο σημεία των δυο τεμνόμενων απλόκων που δεν ανήκουν στην όψη αυτή. Η δομή αυτή χρειάζεται $O(ds_d)$ χώρο, όπου $s_d = O(m^{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor})$ είναι ο μέγιστος αριθμός απλόκων διάστασης d σε μια τριγωνοποίηση του C.

  Τα σημεία του C δεν είναι σε γενική θέση. Στη περίπτωση αυτή πρέπει να διατηρούμε τα άπλοκα κάθε διάστασης. Αυτό γίνεται διατηρώντας για κάθε τριγωνοποίηση, το μερικώς διατεταγμένο (ως προς την σχέση $\subseteq$) σύνολο των εδρών της (face poset). Ο χώρος που απαιτείται είναι $O(ds)$, όπου s είναι ο μέγιστος αριθμός απλόκων κάθε διάστασης στην τριγωνοποίηση (το μέγεθος του face poset).

- **Κυκλώματα.** *Τα σημεία του C είναι σε γενική θέση.* Διατηρούμε όλα τα κυκλώματα που ικανοποιούν τις συνθήκες (1) και (2) του Ορισμού 2.2.2. Από την υπόθεση γενικής θέσης έπεται ότι ένα κύκλωμα είναι ένα σύνολο από $d+2$ σημεία, τα οποία θεωρούμε διατεταγμένα ως προς τους δείκτες τους. Το σύνολο όλων των κυκλωμάτων αναπαρίσταται θεωρητικά από μια λίστα των παραπάνω συνόλων σημείων διατεταγμένη λεξικογραφικά. Η κυρτή θήκη ενός κυκλώματος αποτελείται από το πολύ $d+1$ άπλοκα και πρακτικά αναπαριστούμε ένα κύκλωμα με τα άπλοκα αυτά. Ο αριθμός των κυκλωμάτων είναι $O(ds_d)$ και η παραπάνω αναπαράσταση τους απαιτεί $O(ds_d)$ χώρο.

  Τα σημεία του C δεν είναι σε γενική θέση. Για κάθε τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του C διατηρούμε όλα τα κυκλώματα με διάσταση (της κυρτής τους θήκης) k, για $1 \leq k \leq d$, στα οποία στηρίζεται η $\mathcal{T}$. Στην περίπτωση αυτή τα κυκλώματα που διατηρούμε πρέπει να ικανοποιούν επιπλέον και τη συνθήκη (3) του Ορισμού 2.2.2. Ένα κύκλωμα διάστασης k είναι ένα σύνολο από $k+2$ σημεία και η κυρτή θήκη του αποτελείται από το πολύ $k+1$ άπλοκα διάστασης k. Αναπαριστούμε κάθε τέτοιο κύκλωμα μέσω των απλόκων αυτών. Ο αριθμός των κυκλωμάτων είναι $O(ds)$ και η παραπάνω αναπαράσταση τους απαιτεί $O(ds)$ χώρο.

- **Διανύσματα όγκων.** Για κάθε τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του C, διατηρούμε και το αντίστοιχο διάνυσμα όγκων $\phi_{\mathcal{T}}$.

Μετά από κάθε εφαρμογή μιας αντιστροφής ακμής πρέπει να γίνεται ενημέρωση των δομών αυτών. Αυτό γίνεται αναλυτικά ως εξής:

- **Άπλοκα.** *Τα σημεία του C είναι σε γενική θέση.* Χρειάζεται να έχουμε το μερικώς διατεταγμένο σύνολο μόνο των d και $d-1$ απλόκων και αυτό γίνεται σε χρόνο $O(ds_d)$.

  Τα σημεία του C δεν είναι σε γενική θέση. Πρέπει να ενημερώνουμε το μερικώς διατεταγμένο σύνολο των εδρών μιας τριγωνοποίησης. Αυτό γίνεται σε χρόνο $O(ds)$.

- **Κυκλώματα.** *Τα σημεία του C είναι σε γενική θέση.* Το πολύ d^2 κυκλώματα διαγράφονται ή προστίθενται στη λίστα, δυο κυκλώματα συγκρίνονται ως προς τη λεξικογραφική διάταξη σε χρόνο $O(d)$ και οι συνθήκες του Ορισμού 2.2.2 ελέγχονται σε $O(d^2)$ για κάθε κύκλωμα ελέγχοντας τους γείτονες του. Επομένως η ανανέωση της δομής που αναπαριστά τα κυκλώματα γίνεται σε χρόνο $O(d^2 s_d)$.

  Τα σημεία του C δεν είναι σε γενική θέση. Σε κάθε αντιστροφή ακμής, το πολύ $(d+1)s$ κυκλώματα που αποτελούνται από περισσότερα του ενός άπλοκα διαγράφονται ή προστίθενται στη λίστα. Ο υπολογισμός των κυκλωμάτων αυτών γίνεται σε χρόνο $O(d^4 s)$. Ο έλεγχος των συνθηκών του Ορισμού 2.2.2 σε $O(ds)$ για κάθε κύκλωμα. Υπάρχουν το πολύ m κυκλώματα που αποτελούνται από ένα άπλοκο και ο υπολογισμός τους γίνεται σε χρόνο $O(d^4 sm)$. Επομένως η δομή για τα κυκλώματα μπορεί να ανανεωθεί σε χρόνο $O(d^4 s^2)$.

- **Διανύσματα όγκων.** Ο υπολογισμός του όγκου ενός απλόκου γίνεται σε χρόνο $O(d^3)$, επομένως ο υπολογισμός του διανύσματος όγκων μιας τριγωνοποίησης γίνεται σε χρόνο $O(d^3 s)$.

Η τριγωνοποίηση που υπολογίζεται με εφαρμογή μιας αντιστροφής ακμής μπορεί να μην είναι κανονική άρα δεν θα αντιστοιχεί σε νέα κορυφή του δευτερεύοντος πολυτόπου. Επομένως πρέπει να γίνεται έλεγχος κανονικότητας για κάθε νέα τριγωνοποίηση. Αυτό μπορεί να γίνει με επίλυση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού σε χρόνο $O(LP(m-d-1,s))$ αν δεν ισχύει η υπόθεση γενικής θέσης (Πρόταση 15, [12]) και σε χρόνο $(O(LP(m-d-1,ds_d))$ αν ισχύει (Θεώρημα 3, [14]), όπου με $LP(p,q)$ συμβολίζουμε το χρόνο επίλυσης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού q αυστηρών ανισώσεων σε p μεταβλητές.

Ο αλγόριθμος χρειάζεται μια αρχική τριγωνοποίηση για να ξεκινήσει. Επιλέγουμε την τριγωνοποίηση με το μεγαλύτερο λεξικογραφικά διάνυσμα όγκων.

Αυτή μπορεί να υπολογιστεί από οποιαδήποτε άλλη τριγωνοποίηση (η οποία κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας κατάλληλη - γενική (generic) συνάρτηση ανύψωσης) μετασχηματίζοντάς την εφαρμόζοντας διαδοχικές αντιστροφές ακμών που οδηγούν σε τριγωνοποιήσεις με ολοένα μεγαλύτερα διανύσματα όγκων. Ο χρόνος που χρειάζεται για αυτή τη κατασκευή είναι αμελητέος σε σύγκριση με τον συνολικό χρόνο του αλγόριθμου απαρίθμησης.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έχουμε τα επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα 3.2.3. *[14, Θεώρημα 4] Αν τα σημεία του C είναι σε γενική θέση, η δομή που ορίσαμε επιτρέπει την απαρίθμηση των κανονικών τριγωνοποιήσεων του συνόλου C με αντίστροφη αναζήτηση σε χρόνο $O(ds_d LP(m-d-1, ds_d)|R|)$ και χώρο $O(ds_d)$.*

Θεώρημα 3.2.4. *[12, Θεώρημα 13] Αν τα σημεία του C δεν είναι σε γενική θέση, η δομή που ορίσαμε επιτρέπει την απαρίθμηση των κανονικών τριγωνοποιήσεων του συνόλου C με αντίστροφη αναζήτηση σε χρόνο $O(d^2 s^2 LP(m-d-1, s)|R|)$ και χώρο $O(ds)$.*

Κεφάλαιο 4

Απαρίθμηση των διαμορφώσεων μεικτών κελιών

4.1 Εισαγωγή

Μέσω του αλγόριθμου αντίστροφης αναζήτησης του κεφαλαίου 3 και του τεχνάσματος Cayley (Θεώρημα 3.1.1), μπορούμε να απαριθμήσουμε όλες τις (κανονικές λεπτές) μεικτές υποδιαιρέσεις του αθροίσματος Minkowski $P = P_0 + \ldots + P_n$, όπου $P_i = conv(A_i)$. Επομένως μπορούμε μέσω του Θεωρήματος 1.2.8, να υπολογίσουμε τις κορυφές του πολυτόπου του Νεύτωνα $N(\mathcal{R})$ της απαλοίφουσας $\mathcal{R}$ της *ουσιώδους* οικογένειας συνόλων στήριξης $A_0, \ldots, A_n$ (βλ. Ορισμό 1.2.7).

Οι κορυφές του πολυτόπου του Νεύτωνα της απαλοίφουσας είναι σε $1-1$ αντιστοιχία με τις διαμορφώσεις μεικτών κελιών, δηλαδή με τις κλάσεις ισοδυναμίας των μεικτών υποδιαιρέσεων (βλ. και σχόλια μετά από το Θεώρημα 1.2.8). Στην πράξη το πλήθος των διαμορφώσεων μεικτών κελιών είναι πολύ μικρότερο από το πλήθος των μεικτών υποδιαιρέσεων του P. Επομένως, αν ενδιαφερόμαστε για τον υπολογισμό του πολυτόπου του Νεύτωνα της απαλοίφουσας, θα πρέπει να υπολογίσουμε μόνο τις διαμορφώσεις μεικτών κελιών. Αυτό σημαίνει ότι δεν πρέπει να απαριθμήσουμε όλες τις κανονικές τριγωνοποιήσεις του συνόλου $C = \kappa(P_0, \ldots, P_n)$, αλλά μόνο όσες αντιστοιχούν στις διαμορφώσεις μεικτών κελιών.

Για το σκοπό αυτό προτείνουμε την τροποποίηση του αλγόριθμου απαρίθμησης των κανονικών τριγωνοποιήσεων του κεφαλαίου 3, ώστε να απαριθμεί κανονικές τριγωνοποιήσεις που αντιστοιχούν, μέσω του τεχνάσματος Cayley, σε διαμορφώσεις μεικτών κελιών. Η τροποποίηση αφορά στον εντοπισμό των κυκλωμάτων μιας τριγωνοποίησης $\mathcal{T}$, στα οποία η εφαρμογή αντιστροφής ακμής θα οδηγήσει σε μια νέα τριγωνοποίηση $\mathcal{T}'$, η οποία αντιστοιχεί σε νέα διαμόρφωση μεικτών κελιών.

Θεωρούμε τα πολυώνυμα $f_0, \dots f_n \in \mathbb{C}^n$ με αντίστοιχα πολύτοπα του Νεύτωνα $P_0, \dots, P_n$ και την εικόνα τους $C = \kappa\left(P_0, \dots, P_n\right)$ μέσω της εμφύτευσης Cayley κ. Έστω $d = 2n$ η διάσταση του συνόλου αυτού. Μια μεικτή υποδιαίρεση S του συνόλου $P = P_0 + \ldots + P_n$, θα αντιστοιχεί μέσω του τεχνάσματος Cayley σε κάποια κανονική τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του συνόλου C. Εφόσον η εμφύτευση Cayley είναι 1-1 και επί, θα λέμε ότι το $Z = Z_0 + \cdots + Z_n,\ Z_i \subset P_i$ είναι ένα κύκλωμα της S, αν το $\kappa(Z) = \kappa(Z_0, \dots, Z_n)$, είναι ένα κύκλωμα της $\mathcal{T}$. Η αντιστροφή ακμής σε ένα κύκλωμα $Z \subset S$, είναι η αντιστροφή ακμής στο κύκλωμα $\kappa(Z)$. Για ευκολία, αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα συμβολίζουμε τα Z και $\kappa(Z)$ με το ίδιο διάνυσμα $(Z_0, \dots, Z_n)$ και τα συμφραζόμενα θα καθορίζουν αν αναφερόμαστε σε υποσύνολο της S ή της $\mathcal{T}$. Τέλος, θα αναπαριστούμε κάθε σύνολο Z_i με το σύνολο των κορυφών του ως $Z_i = \{z_{i,1}, \dots, z_{i,|Z_i|}\}$, όπου $z_{j,i} \in vert(Z_i) \subseteq P_i$ ή $z_{j,i} \in vert(Z_i) \subseteq P_i \times e_i$, ανάλογα αν αναφερόμαστε στο κύκλωμα της S ή της $\mathcal{T}$ αντίστοιχα.

Θυμίζουμε ότι κάθε κελί της τριγωνοποίησης $\mathcal{T}$ είναι ένα άπλοκο διάστασης d, το οποίο σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.2, αντιστοιχεί σε ένα κελί διάστασης n της μεικτής υποδιαίρεσης S του P.

Θα λέμε ότι το κύκλωμα Z της $\mathcal{T}$ *σχετίζεται με μεικτό κελί*, αν υπάρχει κελί I της $\mathcal{T}$ και μεικτό κελί $R = F_0 + \cdots + F_n$ της S, ώστε το Z να σχετίζεται (Ορισμός 2.2.4) με το I και επιπλέον $I = \kappa(F_0, \dots, F_n)$, δηλαδή το I είναι εικόνα του R μέσω της εμφύτευσης Cayley.

Όπως και με τα κυκλώματα, θα συμβολίζουμε κάθε μεικτό κελί R της S και την εικόνα του $\kappa(R)$ της $\mathcal{T}$, με το ίδιο διάνυσμα $(F_0, \dots, F_n)$.

Ζητάμε τα κυκλώματα Z της $\mathcal{T}$ τα οποία σχετίζονται με μεικτά κελιά. Η εφαρμογή αντιστροφής ακμής σε ένα τέτοιο κύκλωμα θα καταστρέφει τα μεικτά κελιά της S με τα οποία σχετίζεται και θα δίνει νέα.

4.2 Η ειδική περίπτωση της γενικής θέσης

Έστω ότι για τα σημεία του C ισχύει η *υπόθεση γενικής θέσης*, δηλαδή κάθε $d+1$ σημεία του έχουν κυρτή θήκη διάστασης d. Από την υπόθεση αυτή έπεται ότι κάθε κύκλωμα μιας τριγωνοποίησης $\mathcal{T}$ του C, είναι η κυρτή θήκη διάστασης $d,\ d+2$ ομοπαραλληλικά ανεξάρτητων σημείων, δηλαδή υπάρχουν κυκλώματα μόνο πλήρους διάστασης. Κάθε κύκλωμα αποτελείται από το πολύ d άπλοκα, το καθένα διάστασης d. Η τομή κάθε ζεύγους από τα άπλοκα αυτά, είναι μια κοινή όψη τους, δηλαδή ένα άπλοκο διάστασης $d-1$.

Θεωρούμε το κύκλωμα Z της τριγωνοποίησης $\mathcal{T}$ του συνόλου C. Λόγω της υπόθεσης γενικής θέσης και του Λήμματος 3.1.2, το κύκλωμα Z είναι ένωση το πολύ d απλόκων της $\mathcal{T}$, της μορφής $k(R_i) = k(F_{i,0}, \dots, F_{i,n})$, όπου $P_j \supseteq F_{i,j} \neq \emptyset$ και $R_i = F_{i,0} + \cdots + F_{i,n}$, για $i = 1, \dots, d$, είναι ένα κελί της αντίστοιχης μεικτής υποδιαίρεσης S.

Για να σχετίζεται το Z με ένα μεικτό κελί, θα πρέπει τουλάχιστον ένα από τα κελιά R_i να είναι μεικτό κελί της υποδιαίρεσης S. Δηλαδή θα πρέπει να υπάρχουν φυσικοί $p, q,\ \ 0 \leq p \leq n$ και $0 \leq q \leq d$, ώστε να ισχύει

$$dim(F_{q,i}) = 1 \ \gamma\iota\alpha\ i \neq p \ \kappa\alpha\iota\ dim(F_{q,p}) = 0, \qquad (\Sigma)$$

και επομένως το R_q είναι Minkowski άθροισμα n ακμών και μιας κορυφής.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να απαριθμεί ο αλγόριθμος του κεφαλαίου 3, διαμορφώσεις μεικτών κελιών, πρέπει να διατηρούμε από το σύνολο των κυκλωμάτων μιας τριγωνοποίησης, μόνο τα κυκλώματα τα οποία ικανοποιούν τη παραπάνω συνθήκη. Κάθε κύκλωμα αναπαρίσταται από τη λίστα των απλόκων που το αποτελούν. Επομένως ελέγχοντας ποια από αυτά τα άπλοκα σχετίζονται με κάποιο μεικτό κελί και διαγράφοντας τα υπόλοιπα, μπορούμε να διατηρούμε ένα υπερσύνολο των κυκλωμάτων στα οποία η αντιστροφή ακμής θα δώσει μια τριγωνοποίηση που αντιστοιχεί σε νέα διαμόρφωση μεικτών κελιών.

Παρατήρηση 4.2.1. Αν για κάθε κύκλωμα, ο έλεγχος αν η τριγωνοποίηση στηρίζεται σε αυτό (Ορισμός 2.2.2), προηγείται του ελέγχου της συνθήκης (Σ), τότε διατηρούμε ακριβώς το σύνολο των κυκλωμάτων, στα οποία η αντιστροφή ακμής οδηγεί σε νέα διαμόρφωση μεικτών κελιών. Διαφορετικά, αν ο έλεγχος της συνθήκης (Σ) προηγείται του ελέγχου των συνθηκών του Ορισμού 2.2.2, τότε διατηρούμε ένα υπερσύνολο των κατάλληλων κυκλωμάτων. Αυτό συμβαίνει γιατί μια τριγωνοποίηση μπορεί να μην στηρίζεται σε κάποια από τα κυκλώματα που ικανοποιούν τη συνθήκη (Σ).

Από τη υπόθεση γενικής θέσης έπεται ότι για κάθε μεικτό κελί R_j τύπου p, με $R = \sum_{i=0}^{n} F_{j,i}$, όπου $F_{j,i} \subset P_i$, ισχύει $|vert(F_{j,i})| = 2$ για κάθε $i \neq p$ και $|vert(F_{j,p})| = 1$. Επομένως ο έλεγχος της συνθήκης (Σ) για ένα κύκλωμα Z που αποτελείται από τα άπλοκα $k(R_j) = \kappa(F_{j,0}, \ldots, F_{j,n}),\ j \leq d$, συνίσταται στην εύρεση τουλάχιστον ενός απλόκου για το οποίο τα σύνολα $vert(F_{j,i})$ έχουν τις κατάλληλες πληθικότητες.

Παράδειγμα 4.2.1. Θεωρούμε ότι ισχύει η υπόθεση γενικής θέσης και $n = 1$. Τότε έχουμε τα πολυώνυμα $f_0 = c_{0,1}x^a + c_{0,2}x^b,\ f_1 = c_{1,1}x^c + c_{1,2}x^d \in \mathbb{C}[x]$, όπου οι $c_{i,j}$ είναι γενικοί συντελεστές. Τα πολύτοπα του Νεύτωνα των πολυωνύμων είναι τα ευθύγραμμα τμήματα $P_0 = [a, b]$, και $P_1 = [c, d]$. Από την υπόθεση γενικής θέσης, κάθε πολυώνυμο πρέπει να περιέχει ακριβώς δύο μονώνυμα. Τα σύνολα $P = P_0 + P_1$ και $C = \kappa(P_0, P_1) \subset \mathbb{R}^2$ φαίνονται στο σχήμα 4.1.

Το C είναι ένα κύκλωμα και επομένως έχει ακριβώς δύο τριγωνοποιήσεις $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ όπως στο σχήμα. Οι αντίστοιχες μεικτές υποδιαιρέσεις του αθροίσματος Minkowski P, είναι οι S_1, S_2 οι οποίες υπολογίζονται ως εξής:
Για την τριγωνοποίηση $\mathcal{T}_1$:

- Το κελί $T_{1,1} = (\{(a, 0), (b, 0)\}, \{(c, 1)\})$ της $\mathcal{T}_1$, αντιστοιχεί στο κελί $R_{1,1} = (\{a, b\}, \{c\}) = (a, b) + c$, το οποίο είναι μεικτό τύπου 1.
- Το κελί $T_{1,2} = (\{(b, 0)\}, \{(c, 1), (d, 1)\})$ της $\mathcal{T}_1$, αντιστοιχεί στο κελί $R_{1,2} = (\{b\}, \{c, d\}) = b + (c, d)$, το οποίο είναι μεικτό τύπου 0.

Για την τριγωνοποίηση $\mathcal{T}_2$:

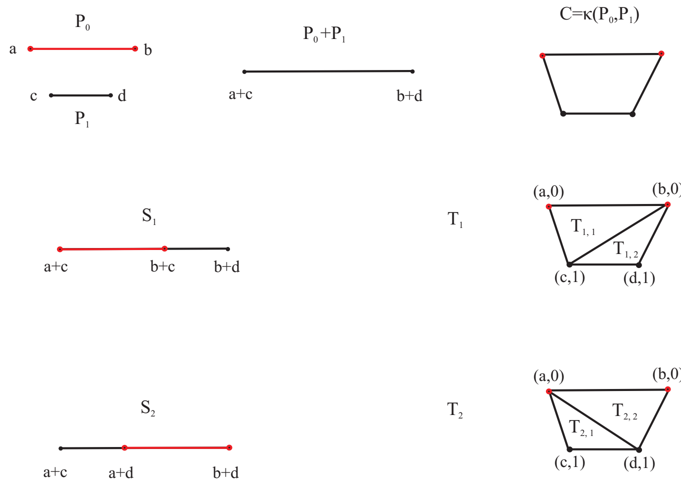
- Το κελί $T_{2,1} = (\{(a,0)\}, \{(c,1),(d,0)\})$ της $\mathcal{T}_2$, αντιστοιχεί στο κελί $R_{2,1} = (\{a\},\{c,d\}) = a + (c,d)$, το οποίο είναι μεικτό τύπου 0.
- Το κελί $T_{2,2} = (\{(a,0),(b,0)\}, \{(d,1)\})$ της $\mathcal{T}_2$, αντιστοιχεί στο κελί $R_{2,2} = (\{a,b\},\{d\}) = (a,b) + d$, το οποίο είναι μεικτό τύπου 1.

Το κύκλωμα C ικανοποιεί τη συνθήκη (Σ) γιατί κάθε άπλοκο που ανήκει σε οποιαδήποτε από τις δύο τριγωνοποιήσεις του, σχετίζεται με ένα μεικτό κελί της αντίστοιχης μεικτής υποδιαίρεσης του P. Επιπλέον παρατηρούμε ότι τα άπλοκα του κυκλώματος C έχουν διανύσματα πληθικοτήτων της μορφής $(2,1)$ ή $(1,2)$ και επομένως ο αλγόριθμος απαρίθμησης θα εφαρμόσει αντιστροφή ακμής στο κύκλωμα αυτό.

Έστω ότι οι εκθέτες των πολυωνύμων f_0, f_1 έχουν τις τιμές $a = 0, b = 3, c = 5, d = 0$. Θα υπολογίσουμε το πολύτοπο της απαλοίφουσας $N(\mathcal{R})$ των πολυωνύμων αυτών χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.2.8.

Τα διανύσματα όγκων των τριγωνοποιήσεων $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2$ του συνόλου C είναι τα $\phi_{\mathcal{T}_1} = (4, 1.5, 4, 2.5)$ και $\phi_{\mathcal{T}_2} = (1.5, 4, 2.5, 4)$. Το δευτερεύον πολύτοπο είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία αυτά. Τα μεικτά κελιά των αντίστοιχων μεικτών υποδιαιρέσεων S_1, S_2 του συνόλου $P = P_0 + P_1$, είναι τα $\{0 + (0,5)\}$, $\{5 + (0,3)\}$ και $\{0 + (0,3)\}$, $\{3 + (0,5)\}$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.2.8 υπολογίζουμε τα ακραία μονώνυμα της απαλείφουσας του συστήματος των δύο πολυωνύμων $c_{02}^5 c_{12}^3$, $c_{01}^5 c_{11}^3$ που αντιστοιχούν στις δυο κορυφές του πολυτόπου του Νεύτωνα $N(\mathcal{R})$: $v_1 = (5,0,3,0)$, $v_2 = (0,5,0,3)$. Η απαλοίφουσα των f_0, f_1 είναι το πολυώνυμο $\mathcal{R} = c_{02}^5 c_{12}^3 - c_{01}^5 c_{11}^3$.



Σχήμα 4.1: Η περίπτωση δύο πολυωνύμων σε μια μεταβλητή κάτω από την υπόθεση γενικής θέσης.

4.3 Η γενική περίπτωση

Στην ενότητα αυτή αναιρούμε την υπόθεση γενικής θέσης. Αν για το σύνολο C δεν ισχύει η υπόθεση γενικής θέσης, τότε σε μια τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του C, μπορεί να υπάρχουν κυκλώματα κάθε διάστασης $k = 1, \dots, d$. Επομένως για κάθε τέτοιο κύκλωμα στο οποίο στηρίζεται η $\mathcal{T}$, πρέπει να ελέγχουμε αν αυτό σχετίζεται με ένα μεικτό κελί.

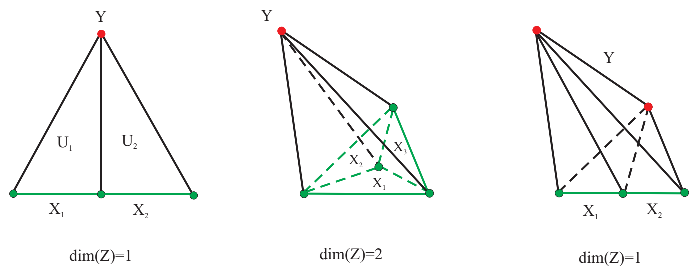
Θεωρούμε μια τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του C και ένα κύκλωμα $Z = (Z_0, \dots, Z_n)$ διάστασης $k \leq d$ στο οποίο στηρίζεται η $\mathcal{T}$. Η $\mathcal{T}$ επάγει μια τριγωνοποίηση $\mathcal{T}|Z$ του Z η οποία είναι μια από τις $\mathcal{T}_-, \mathcal{T}_+$. Έστω $X_1, \dots, X_k$ τα άπλοκα διάστασης k της $\mathcal{T}|Z$. Αφού η $\mathcal{T}$ στηρίζεται στο Z, από τον ορισμό 2.2.2 έπεται ότι κάθε άπλοκο X_i είναι k-έδρα κάποιου απλόκου U_i, διάστασης d, της $\mathcal{T}$. Επιπλέον υπάρχουν σύνολα $Y_1, \dots, Y_k \subset C \setminus Z$, με κυρτή θήκη διάστασης $d-k-1$, ώστε $U_i = conv(X_i \cup Y_i)$. Αν $k = d$ τότε $Y_i = \emptyset$ και $U_i = X_i$.

Το Z είναι η κυρτή θήκη $k+2$ σημείων τα οποία είναι ομοπαραλληλικά εξαρτημένα, ενώ κάθε άπλοκο X_i, (έδρα του U_i) είναι η κυρτή θήκη $k+1$ ομοπαραλληλικά ανεξάρτητων σημείων. Επομένως το κύκλωμα Z είναι η κυρτή θήκη των $k+1$ σημείων ενός απλόκου X_i και ενός σημείου c που ανήκει στο ίδιο k-διάστατο υπερεπίπεδο με το X_i αλλά όχι στο σύνολο των κορυφών $vert(U_i)$ του U_i. Έτσι έχουμε δείξει το επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 4.3.1. *Αν $\mathcal{T}$ είναι μια τριγωνοποίηση του C η οποία στηρίζεται σε ένα κύκλωμα Z διάστασης k και X ένα κελί της τριγωνοποίησης $\mathcal{T}|Z$ του Z, τότε υπάρχει ένα άπλοκο $U = (U_0, \dots, U_r, \dots, U_n)$ της $\mathcal{T}$, το οποίο περιέχει το X ως k-έδρα και το Z γράφεται ως*

$$Z = (Z_0, \dots, Z_r \cup \{c\}, \dots, Z_n),$$

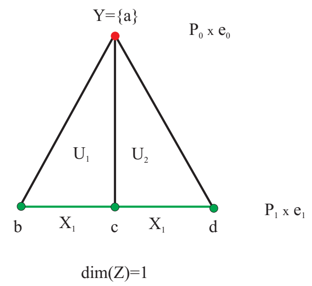
όπου $Z_i \subseteq U_i$ και $c \in P_r \times e_r \setminus |(U_r)$.



Σχήμα 4.2: Η μορφή εκφυλισμένων κυκλωμάτων για $d = 2, 3$ και $k = 1, 2$.

Παρατηρούμε ότι ένα κύκλωμα Z μπορεί να γραφεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους ανάλογα με το άπλοκο X_i (ισοδύναμα το άπλοκο U_i) που θα επιλέξουμε.

Παράδειγμα 4.3.1. Έστω το κύκλωμα $Z = (\emptyset, \{b, c, d\})$ του σχήματος 4.3. Αν επιλέξουμε το άπλοκο $X_1 = (\emptyset, \{b, c\})$, το οποίο είναι έδρα του απλόκου $U_1 = (\{a\}, \{b, c\})$, τότε το Z γράφεται ως $Z = (\emptyset, \{b, c\} \cup \{d\})$, $d \in P_1 \times e_1$. Αν επιλέξουμε το άπλοκο $X_2 = (\emptyset, \{c, d\})$, το οποίο είναι έδρα του απλόκου $U_2 = (\{a\}, \{c, d\})$, τότε το Z γράφεται ως $Z = (\emptyset, \{c, d\} \cup \{b\})$, $b \in P_1 \times e_1$.



Σχήμα 4.3: Το κύκλωμα του παραδείγματος 4.3.1.

Τα κυκλώματα που μας ενδιαφέρουν είναι αυτά που σχετίζονται με μεικτό κελί, δηλαδή τα κυκλώματα τα οποία σχετίζονται με ένα άπλοκο διάστασης d που είναι εικόνα ενός μεικτού κελιού. Από τον χαρακτηρισμό των κυκλωμάτων που δώσαμε παραπάνω, έπεται ότι ένα κύκλωμα Z που σχετίζεται με μεικτό κελί πρέπει να περιέχει τουλάχιστο ένα άπλοκο X το οποίο να είναι έδρα ενός απλόκου $U = \kappa(R)$ της $\mathcal{T}$, όπου R είναι ένα μεικτό κελί της S. Η επόμενη πρόταση είναι μια αναγκαία συνθήκη για να σχετίζεται ένα κύκλωμα Z της $\mathcal{T}$ με ένα μεικτό κελί. Επιπλέον μας παρέχει ένα συνδυαστικό κριτήριο ελέγχου των κυκλωμάτων αυτών.

Πρόταση 4.3.2. [1] *Έστω $Z = (Z_0, \ldots, Z_n)$ ένα κύκλωμα μιας τριγωνοποίησης $\mathcal{T}$ του C και $R = (F_0, \ldots, F_s, \ldots, F_n)$ ένα μεικτό κελί τύπου s, της αντίστοιχης μεικτής υποδιαίρεσης S, με $F_i = \{f_{i1}, f_{i2}\}$ ακμή για $i \neq s$ και $F_s = \{v_s\}, v_s \in P_s$ κορυφή. Αν το Z σχετίζεται με το $\kappa(R)$, τότε υπάρχουν $0 \leq r \leq n$, $r \in \mathbb{N}$ και $c \in P_r \times e_r$, ώστε για τα σύνολα Z_i να ισχύει*

$$\begin{array}{ccc} Z_i = F_i \times e_i & \text{ή} & Z_i = \emptyset, \ \ \text{αν} \ \ i \neq r \\ & \text{και} & \\ Z_r = F_r \times e_r \cup \{c\} & \text{ή} & Z_r = \{f_r\} \cup \{c\}, \ f_r \in F_r \times e_r, \ \ \text{αν} \ \ i = r. \end{array} \tag{4.1}$$

Απόδειξη Από το Λήμμα 4.3.1 έπεται ότι υπάρχουν $r \in \mathbb{N}$ και $c \in P_r \times e_r$ ώστε το Z να γράφεται ως

$$Z = (Z_0, \ldots, Z_r \cup \{c\}, \ldots, Z_n), \ Z_i \subseteq F_i \times e_i.$$

Αφού το Z είναι κύκλωμα, υπάρχει μια μοναδική (μέχρις πολλαπλασιασμού με θετικό πραγματικό αριθμό) ομοπαραλληλική σχέση μεταξύ των στοιχείων του

[1] Η πρόταση βασίζεται στο θεώρημα 5.1 του [15]

Z:
$$\sum_{z\in Z} g_z z = 0, \quad \mu\epsilon \quad \sum_{z\in Z} g_z = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad g_z \neq 0,\ \forall z \in Z.$$
Τα σημεία $z \in Z$ είναι της μορφής (z', e_i), $z' \in P_i$. Ξαναγράφοντας την προηγούμενη σχέση χωρίζοντας τους προσθετέους ανάλογα με το σύνολο P_i στο οποίο ανήκουν, έχουμε
$$\sum_{i=0}^{d} \left(\sum_{z'\in P_i} g_{z'}(z', e_i) \right) = 0, \tag{4.2}$$
όπου $\sum_{i=0}^{d} \left(\sum_{z'\in P_i} g_{z'}\right) = 0$ και $g_{z'} \neq 0,\ \forall i\ \forall z' \in P_i$.

Τα διανύσματα e_i, e_j είναι γραμμικά ανεξάρτητα επομένως για κάθε $i \neq j$ έχουμε $< e_i, e_j >= 0$ και $< e_i, e_i >= 1$. Θεωρούμε το διάνυσμα $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ και σχηματίζουμε τα εσωτερικά γινόμενα της σχέσης 4.2 με κάθε διάνυσμα $(\mathbf{0}, e_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Παίρνουμε τις σχέσεις:
$$\sum_{z'\in P_0} g_{z'} = 0,\ \ldots\ ,\sum_{z'\in P_s} g_{z'} = 0,\ \ldots\ ,\sum_{z'\in P_s} g_{z'} = 0,\ \ldots\ ,\sum_{z'\in P_s} g_{z'} = 0, \tag{4.3}$$
δηλαδή το άθροισμα των συντελεστών g_z, των σημείων z κάθε συνόλου Z_i, είναι ίσο με μηδέν. Αυτό συνεπάγεται ότι $|Z_i| \neq 1,\ \forall i = 0, \ldots, n$.

Τελικά για το κύκλωμα $Z = (Z_0, \ldots, Z_n)$ έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. $i \neq r$, τότε για κάθε Z_i ισχύει
   - $|Z_i| = 0 \Longleftrightarrow Z_i = \emptyset$ ή
   - $|Z_i| = 2 \Longleftrightarrow Z_i = F_i \times e_i$.
2. $i = r$ τότε για το Z_r ισχύει
   - $|Z_r| = 2 \Longleftrightarrow Z_i = \{f_i\} \cup \{c\},\ f_i \in F_i \times e_i,\ c \in P_r \times e_r$ ή
   - $|Z_r| = 3 \Longleftrightarrow Z_i = F_i \times e_r \cup \{c\},\ c \in P_r \times r$,

από τις οποίες προκύπτουν οι σχέσεις 4.1. □

Θα καλούμε τα κυκλώματα με $|Z_r| = 2$, άρτια και τα κυκλώματα με $Z_r = 3$, περιττά.

Παρατηρούμε ότι το κύκλωμα Z δεν μπορεί να περιέχει την κορυφή $(v_s, e_s) \in F_s \times e_s$, του τύπου s μεικτού κελιού R, παρά μόνο αν $s = r$ και το σύνολο Z_r του Z είναι της μορφής $Z_r = F_s \times e_s \cup \{c\} = \{(v_s, e_s), c\}$.

Σύμφωνα με την πρόταση 4.3.2, για να απαριθμεί ο αλγόριθμος του κεφαλαίου 3, μόνο τις διαμορφώσεις μεικτών κελιών θα πρέπει να εκτελεί αντιστροφές ακμών μόνο σε κυκλώματα τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις 4.1.

Παράδειγμα 4.3.2. Έστω ότι έχουμε τα πολυώνυμα $f_0 = c_{0,1}x^a + c_{0,2}x^b$, $f_1 = c_{1,1}x^c + c_{1,2}x^d + c_{1,3}x^e \in \mathbb{C}[x]$, όπου οι $c_{i,j}$ είναι γενικοί συντελεστές. Αν υποθέσουμε ότι $a < b$ και $c < d < e$, τότε τα πολύτοπα του Νεύτωνα των πολυωνύμων είναι τα ευθύγραμμα τμήματα $P_0 = [a, b]$ και $P_1 = [c, e]$. Το πολυώνυμο f_1 περιέχει τρία μονώνυμα και το f_0 δύο. Επομένως για το σύνολο $C = \kappa(P_0, P_1)$ δεν ισχύει η υπόθεση γενικής θέσης αφού το σύνολο $P_1 \times e_1$ περιέχει τρία συνευθειακά σημεία. Οι τριγωνοποιήσεις του συνόλου C που αντιστοιχούν σε διαμορφώσεις μεικτών κελιών, καθώς και οι αντίστοιχες διαμορφώσεις μεικτών κελιών του συνόλου $S = P_0 + P_1$, φαίνονται στο σχήμα 4.4. Οι αντιστροφές ακμών και τα αντίστοιχα κυκλώματα στα οποία αυτές εκτελούνται είναι τα παρακάτω:

1. $flip_{Z_1}(\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}_2$, όπου το κύκλωμα Z_1 σχετίζεται με το μεικτό κελί τύπου 0, $R = (F_0, F_1) = (\{a\}, \{c, e\})$ και γράφεται ως:
$$Z_1 = (\emptyset, \{F_1 \times 1 \cup \{(d, 1)\}\}) = (\emptyset, \{\{(c, 1), (e, 1)\} \cup \{(d, 1)\}\}) .$$
Το κύκλωμα Z_1 είναι περιττό.

2. $flip_{Z_2}(\mathcal{T}_2) = \mathcal{T}_3$, όπου το κύκλωμα Z_2 σχετίζεται με το μεικτό κελί τύπου 0, $R_1 = (F_{1,0}, F_{1,1}) = (\{a\}, \{d, e\})$ και το μεικτό κελί τύπου 1, $R_2 = (F_{2,0}, F_{2,1}) = (\{a, b\}, \{e\})$. Το Z_2 είναι ένα άρτιο κύκλωμα και γράφεται ως:
$$Z_2 = (F_{1,0} \times 0 \cup \{(b, 0)\}, F_{1,1} \times 1) = (\{(a, 0), (b, 0)\}, \{(d, 1), (e, 1)\}) ,$$
ή
$$Z_2 = (F_{2,0} \times 0, F_{2,1} \times 1 \cup \{(d, 1)\}) = (\{(a, 0), (b, 0)\}, \{(d, 1), (e, 1)\}) .$$

3. $flip_{Z_3}(\mathcal{T}_3) = \mathcal{T}_4$, όπου το κύκλωμα Z_3 σχετίζεται με με το μεικτό κελί τύπου 0, $R_1 = (F_{1,0}, F_{1,1}) = (\{a\}, \{c, d\})$ και το μεικτό κελί τύπου 1, $R_2 = (F_{2,0}, F_{2,1}) = (\{a, b\}, \{d\})$. Το Z_2 είναι ένα άρτιο κύκλωμα και γράφεται ως:
$$Z_3 = (F_{1,0} \times 0 \cup \{(b, 0)\}, F_{1,1} \times 1) = (\{(a, 0), (b, 0)\}, \{(c, 1), (d, 1)\}) ,$$
ή
$$Z_3 = (F_{2,0} \times 0, F_{2,1} \times 1 \cup \{(c, 1)\}) = (\{(a, 0), (b, 0)\}, \{(c, 1), (d, 1)\}) .$$

4. $flip_{Z_4}(\mathcal{T}_4) = \mathcal{T}_5$, όπου το κύκλωμα Z_4 σχετίζεται με με τα μεικτά κελιά τύπου 0, $R_1 = (F_{1,0}, F_{1,1}) = (\{b\}, \{c, d\})$ και $R_2 = (F_{2,0}, F_{2,1}) = (\{b\}, \{d, e\})$. Το Z_4 είναι ένα περιττό κύκλωμα και γράφεται ως:
$$Z_4 = (\emptyset, F_{1,1} \times 1 \cup \{(e, 1)\}) = (\emptyset, \{(c, 1), (d, 1), (e, 1)\}) ,$$
ή
$$Z_4 = (\emptyset, F_{2,1} \times 1 \cup \{(c, 1)\}) = (\emptyset, \{(c, 1), (d, 1), (e, 1)\}) .$$

Αν θέσουμε $a = 0, b = 4, c = 5, d = 2, e = 0$, παίρνουμε τα πολυώνυμα

$$f_0 = c_{0,1} + c_{0,2}x^4,\ f_1 = c_{1,1}x^5 + c_{1,2}x^2 + c_{1,3} \in \mathbb{C}[x].$$

Θα υπολογίσουμε το πολύτοπο της απαλοίφουσας $N(\mathcal{R})$ των πολυωνύμων αυτών.

Τα διανύσματα όγκων των πέντε τριγωνοποιήσεων του συνόλου C είναι τα $\phi_{\mathcal{T}_1} = (4.5, 2, 4.5, 0, 2.5)$, $\phi_{\mathcal{T}_2} = (4.5, 2, 3.5, 2.5, 1)$, $\phi_{\mathcal{T}_3} = (3, 3.5, 1.5, 4.5, 1)$, $\phi_{\mathcal{T}_4} = (2, 4.5, 1.5, 2.5, 3)$ και $\phi_{\mathcal{T}_5} = (2, 4.5, 2.5, 0, 4.5)$.

Οι αντίστοιχες μεικτές υποδιαιρέσεις $S_1, \ldots, S_5$ του συνόλου $P = P_0 + P_1$, είναι οι
$S_1 = \{\{0 + (0, 5)\},\ \{5 + (0, 4)\}\}$,
$S_2 = \{\{0 + (0, 2)\}, \{0 + (2, 5),\ \{5 + (0, 4)\}\}$,
$S_3 = \{\{0 + (0, 2)\}, \{2 + (0, 4),\ \{4 + (2, 5)\}\}$,
$S_4 = \{\{0 + (0, 4)\}, \{4 + (0, 2),\ \{4 + (2, 5)\}\}$ και
$S_5 = \{\{0 + (0, 4)\}, \{4 + (0, 5)\}\}$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.2.8 υπολογίζουμε τα ακραία μονώνυμα της απαλείφουσας του συστήματος των δύο πολυωνύμων:

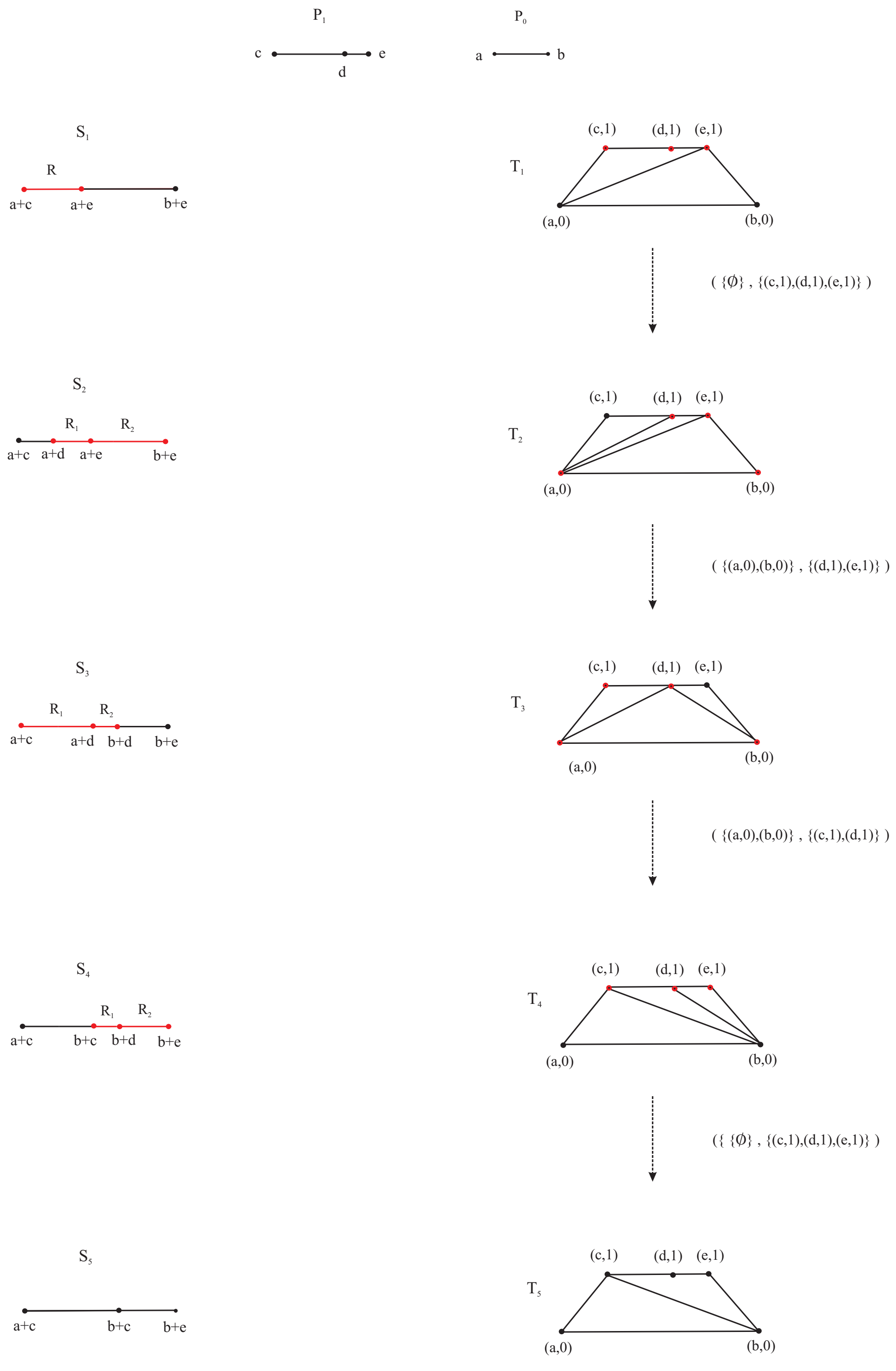
$$c_{0,1}^5 c_{1,1}^4,\ c_{0,1}^2 c_{1,2}^4 c_{0,2}^3,\ c_{0,1}^2 c_{0,2}^3 c_{1,2}^4,\ c_{0,1}^2 c_{0,1}^3 c_{1,3}^4,\ c_{0,2}^5 c_{1,3}^4$$

που αντιστοιχούν στις τρεις κορυφές του πολυτόπου του Νεύτωνα $N(\mathcal{R})$: $v_1 = (5, 0, 4, 0, 0)$, $v_2 = (0, 5, 0, , 0, 4)$, $v_3 = (2, 3, 0, 4, 0)$.

Τα ακραία μονώνυμα που υπολογίζονται είναι πέντε, όσες και οι τριγωνοποιήσεις του συνόλου C αλλά υπάρχουν δυο όμοια ζεύγη. Έτσι το πολύτοπο του Νεύτωνα της απαλοίφουσας είναι το τρίγωνο με κορυφές τα διανύσματα v_1, v_2, v_3.

Η απαλοίφουσα των f_0, f_1 είναι το πολυώνυμο

$$\mathcal{R} = c_{02}^5 c_{13}^4 + 2c_{0,1} c_{02}^4 c_{12}^2 c_{1,3}^2 + c_{0,1}^2 c_{0,2}^3 c_{1,2}^4 - 4c_{0,1}^3 c_{0,2}^2 c_{1,1}^2 c_{1,2} c_{1,3} + c_{0,1}^5 c_{1,1}^4.$$



Σχήμα 4.4: Η γενική περίπτωση δύο πολυωνύμων σε μια μεταβλητή.

Κεφάλαιο 5

Μια εφαρμογή στην αλγεβρικοποίηση

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μια εφαρμογή του αλγόριθμου απαρίθμησης διαμορφώσεων μεικτών κελιών στην αλγεβρικοποίηση μιας παραμετρικά δοσμένης καμπύλης ή επιφάνειας. Ο αλγόριθμος αλγεβρικοποίησης IPSOS, στον οποίο εφαρμόζονται οι μέθοδοι της εργασίας αυτής, έχει αναπτυχθεί από τους Ι. Εμίρη και Η. Κοτσιρέα [7],[8]. Ο IPSOS χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο απαρίθμησης κανονικών τριγωνοποιήσεων PUNTOS του J. De Loera [5], ο οποίος βασίζεται στην μέθοδο κατά πλάτος αναζήτησης και έχει υλοποιηθεί σε MAPLE. Εφόσον ο PUNTOS βασίζεται στην μέθοδο της κατά πλάτος αναζήτησης, έχει χωρική πολυπλοκότητα $\Omega(T)$, όπου T είναι το πλήθος των κανονικών τριγωνοποιήσεων του συνόλου σημείων της εισόδου του. Η πολυπλοκότητα αυτή καθιστά απαγορευτική τη χρήση του σε εισόδους μετρίου έως μεγάλου μεγέθους. Προτείνεται η τροποποίηση του αλγορίθμου IPSOS ώστε να χρησιμοποιεί τον προτεινόμενο αλγόριθμο απαρίθμησης διαμορφώσεων μεικτών κελιών και εξετάζεται η δυνατότητα εφαρμογής ενός αλγόριθμου προβολής που αναμένεται να βελτιώσει περαιτέρω τη πολυπλοκότητα του.

5.2 Ο αλγόριθμος IPSOS

Ο αλγόριθμος IPSOS χρησιμοποιεί εργαλεία από την αλγεβρική γεωμετρία και ιδιαίτερα από την θεωρία αραιάς απαλοιφής για να υπολογίσει ένα υπερσύνολο του συνόλου στήριξης της αλγεβρικής εξίσωσης μιας παραμετρικά δομένης υπερεπιφάνειας. Παρουσιάζουμε μια τροποποιημένη εκδοχή του αλγορίθμου που χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο απαρίθμησης των διαμορφώσεων μεικτών κελιών.

Έστω ότι μας δίνεται η παραμετρική έκφραση μιας υπερεπιφάνειας

$$x_i = \frac{P_i(t)}{Q(t)},\ i = 0, \dots, n.$$

Θεωρούμε τα πολυώνυμα $f_i = x_i Q(t) - P_i(t) \in \mathbb{C}[t]$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$, με σύνολα στήριξης τα $A_i \subset \mathbb{Z}^n$ και αντίστοιχα πολύτοπα του Νεύτωνα P_i. Στα πολυώνυμα f_i έχουμε αντικαταστήσει τους συγκεκριμένους συντελεστές των $Q(t)$ και $P_i(t)$ με γενικούς (generic) συντελεστές $c_{i,j}$. Η αλγεβρική εξίσωση της υπερεπιφάνειας είναι η απαλοίφουσα του συστήματος πολυωνύμων f_i, με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχουν base points και η παραμετρικοποίηση είναι 1-1. Αν δεν ισχύει η τελευταία συνθήκη, τότε η απαλοίφουσα του συστήματος ισούται με ένα πολλαπλάσιο της αλγεβρικής εξίσωσης.
Τα βήματα του αλγορίθμου είναι:

1. Όρισε τα πολυώνυμα $f_i = \sum c_{ij} t^{a_{ij}}, \in \mathbb{C}[t]$, όπου $a_{ij} \in A_i$ και c_{ij} γενικοί (generic) συντελεστές.

2. Κατασκεύασε το σύνολο C εφαρμόζοντας το τέχνασμα Cayley στα πολύτοπα του Νεύτωνα $P_0, \ldots, P_n$ και εφάρμοσε τον τροποποιημένο αλγόριθμο απαρίθμησης τριγωνοποιήσεων στο σύνολο αυτό. Με τον τρόπο αυτό υπολογίζουμε όλες τις διαμορφώσεις μεικτών κελιών του αθροίσματος Minkowski $P = P_0 + \ldots + P_n$.

3. Υπολόγισε τα ακραία μονώνυμα (κορυφές του πολυτόπου του Νεύτωνα $N(\mathcal{R})$, της απαλοίφουσας). Το σύνολο αυτό μαζί με όλα τα ακέραια σημεία στο εσωτερικό του $N(\mathcal{R})$, είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου στήριξης της απαλοίφουσας.

4. Μετέτρεψε το σύνολο στήριξης, από ένα σύνολο μονωνύμων της μορφής $\prod c_{ij}^{e_{ij}}$, σε ένα σύνολο μονωνύμων ως προς τις μεταβλητές x_i.

5. Χρησιμοποιώντας φράγματα στον βαθμό της αλγεβρικής εξίσωσης, απάλειψε όσα μονώνυμα δεν ικανοποιούν τα κριτήρια.

Κατά την εκτέλεση του βήματος 2 του αλγορίθμου, υπολογίζονται όλοι οι μερικοί μεικτοί όγκοι MV_{-i} (βλ. Πόρισμα 1.2.5) οι οποίοι και δίνουν τον βαθμό της αλγεβρικής εξίσωσης ως προς κάθε μεταβλητή x_i ξεχωριστά. Η πληροφορία αυτή χρησιμοποιείται στο βήμα 5 για την απαλοιφή όσων μονωνύμων δεν έχουν κατάλληλο συνολικό βαθμό.

5.3 Αλγόριθμος προβολής

Τα πολυώνυμα f_i τα οποία ορίζονται στο βήμα 1 του αλγόριθμου IPSOS έχουν γενικούς (generic) συντελεστές, οι οποίοι στο βήμα 4 αντικαθίστανται από συναρτήσεις των x_i. Η διαδικασία αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως προβολή του πολυτόπου $N(\mathcal{R})$, διάστασης $d = m - 2n - 1$, $m = \sum_{i=0}^{n} |A_i|$, σε ένα χώρο διάστασης $k = n + 1$. Συνήθως $k = 2, 3$ ανάλογα με τον αν ζητάμε την αλγεβρική εξίσωση καμπύλης ή επιφάνειας.

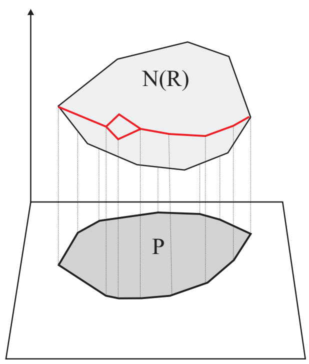
Έστω P, η προβολή αυτή του $N(\mathcal{R})$. Πολλές από τις κορυφές του πολυτόπου $N(\mathcal{R})$ που υπολογίζει ο αλγόριθμος, θα προβάλλονται στο εσωτερικό του πολυτόπου P. Οι κορυφές αυτές δεν συνεισφέρουν στη διαδικασία εύρεσης της αλγεβρικής εξίσωσης και μια σημαντική βελτίωση θα ήταν η τροποποίηση του αλγορίθμου απαρίθμησης του πολυτόπου της απαλοίφουσας ώστε να μην τις υπολογίζει. Αυτό είναι ισοδύναμο με την εξερεύνηση του πολυτόπου $N(\mathcal{R})$ κατά μήκος ενός μονοπατιού που περιέχει τουλάχιστον όλες τις κορυφές οι προβολές των οποίων είναι κορυφές του P.

Δυο πιθανές προσσεγγίσεις του προβλήματος είναι οι ακόλουθες:

• Η εξερεύνηση του πολυτόπου $N(\mathcal{R})$ γίνεται από τον αλγόριθμο αντίστροφης αναζήτησης με βάση τη ταξινομημένη λίστα των κυκλωμάτων μιας τριγωνοποίησης. Θέλουμε να καθορίσουμε ποια είναι τα κατάλληλα κυκλώματα, στα οποία η εφαρμογή αντιστροφής ακμής οδηγεί από μια κορυφή του $N(\mathcal{R})$ που προβάλλεται σε κορυφή του R, σε μια γειτονική της με την ίδια ιδιότητα.

• Έστω ότι το πολύτοπο P ορίζεται από τις $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$, δηλαδή προβάλλουμε το πολύτοπο $N(\mathcal{R})$ διαγράφοντας τις πρώτες k συντεταγμένες $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Ένα υπερεπίπεδο θα λέγεται κάθετο αν περιέχει τις συνταταγμένες αυτές. Η τομή των καθέτων υπερεπιπέδων στήριξης (support hyperplanes) με το πολύτοπο $N(\mathcal{R})$ είναι μια όψη του πολυτόπου που ορίζεται από κορυφές του που προβάλλονται στο περίγραμμα του πολυτόπου P. Ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε αυτές τις κορυφές.

Έστω ότι έχουμε υπολογίσει μια κορυφή v του $N(\mathcal{R})$ η οποία προβάλλεται σε κορυφή του πολυτόπου P. Η επόμενη κατάλληλη κορυφή του $N(\mathcal{R})$ υπολογίζεται ελέγχοντας για κάθε γειτονική κορυφή w της v, αν είναι ακραία ως προς τις προβολές των γειτονικών της κορυφών.



Επίλογος

Στη εργασία αυτή εξετάσαμε αποτελεσματικούς τρόπους υπολογισμού του πολυτόπου του Νεύτωνα της τορικής απαλοίφουσας ενός συστήματος $n+1$ πολυωνύμων σε n μεταβλητές με συμβολικούς συντελεστές.

Σύμφωνα με το θεώρημα 1.2.8, υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία των διαμορφώσεων μεικτών κελιών και των ακραίων μονωνύμων της απαλοίφουσας. Επομένως για τον υπολογισμό του πολυτόπου του Νεύτωνα της απαλοίφουσας αρκεί ο υπολογισμός όλων των διαμορφώσεων μεικτών κελιών.

Το τέχνασμα Cayley (θεώρημα 3.1.1) ανάγει τον υπολογισμό όλων των λεπτών κανονικών μεικτών υποδιαιρέσεων του αθροίσματος Minkowski των πολυτόπων του Νεύτωνα των πολυωνύμων του συστήματος, στον υπολογισμό όλων των κανονικών τριγωνοποιήσεων της εικόνας των πολυτόπων αυτών μέσω της εμφύτευσης Cayley.

Τροποποιώντας τον αλγόριθμο απαρίθμησης κανονικών τριγωνοποιήσεων του [12] μπορούμε, με την εφαρμογή αντιστροφών ακμών σε κατάλληλα κυκλώματα τα οποία προσδιορίζονται από την πρόταση 4.3.2, να υπολογίσουμε μόνο τις κανονικές τριγωνοποιήσεις που αντιστοιχούν στις διαμορφώσεις μεικτών κελιών.

Τέλος δώσαμε μια εφαρμογή των μεθόδων αυτών περιγράφοντας έναν αλγόριθμο αλγεβρικοποίησης.

Βιβλιογραφία

[1] David Avis and Komei Fukuda. Reverse search for enumeration. *Discrete Appl. Math.*, 65(1-3):21–46, 1996.

[2] L. Billera and B. Sturmfels. Fiber polytopes. *Ann. Math*, 135(3):527–549, 1992.

[3] David A. Cox, John B. Little, and Don O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms.* Springer-Verlag, NY, 2nd edition, 1996.

[4] David A. Cox, John B. Little, and Don O'Shea. *Using Algebraic Geometry*, volume 185 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, NY, 1998.

[5] J.A. De Loera. PUNTOS: Maple subroutines for the investigation of secondary polytopes, available at http://www.math.ucdavis.edu/deloera/RECENT_WORK/recent.html, 1994.

[6] Ioannis Z. Emiris and John F. Canny. Efficient incremental algorithms for the sparse resultant and the mixed volume. *Journal of Symbolic Computation*, 20(2):117–150, 1995.

[7] I.Z. Emiris and I.S. Kotsireas. Implicitization with polynomial support optimized for sparseness. In V. Kumar et al., editor, *Proc. Intern. Conf. Comput. Science & Appl. 2003, Montreal, Canada (Intern. Workshop Computer Graphics & Geom. Modeling)*, volume 2669 of *LNCS*, pages 397–406. Springer, 2003.

[8] I.Z. Emiris and I.S. Kotsireas. Implicitization exploiting sparseness. In R. Janardan, M. Smid, and D. Dutta, editors, *Geometric and Algorithmic Aspects of Computer-Aided Design and Manufacturing*, volume 67 of *DIMACS*, pages 281–298. AMS/DIMACS, 2005.

[9] I. Gelfand, M. Kapranov, and A. Zelevinsky. *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants.* Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1994.

[10] B. Grünbaum. *Convex Polytopes.* Wiley-Interscience, 1967.

[11] Birkett Huber, Jörg Rambau, and Francisco Santos. The Cayley trick, lifting subdivisions and the Bohne-Dress theorem on zonotopal tilings. *J. of Eur. Math. Soc.*, 2:179–198, 2000.

[12] Hiroshi Imai, Tomonari Masada, Fumihiko Takeuchi, and Keiko Imai. Enumerating triangulations in general dimensions. *International Journal of Computational Geometry and Applications (IJCGA)*, 12(6):455–480, 2002.

[13] F. S. Macauley. Some formulae in elimination. *Proc. London Math. Soc.*, 1(33):3–27, 1902.

[14] Tomonari Masada, Hiroshi Imai, and Keiko Imai. Enumeration of regular triangulations. In *SCG '96: Proceedings of the twelfth annual symposium on Computational geometry*, pages 224–233, New York, NY, USA, 1996. ACM Press.

[15] T. Michiels and J. Verschelde. Enumerating regular mixed-cell configurations. *Discrete Comput. Geom.*, 21(4):569–579, 1999.

[16] Jörg Rambau. TOPCOM: a program for computing all triangulations of a point set, available at http://www.uni-bayreuth.de/departments/wirtschaftsmathematik/rambau/TOPCOM, 1994.

[17] Francisco Santos. The Cayley trick and triangulations of products of simplices, 2005.

[18] Bernd Sturmfels. On the Newton polytope of the resultant. *J. Algebraic Comb.*, 3(2):207–236, 1994.

[19] Bernd Sturmfels. Solving systems of polynomial equations. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, 97, 2002.

[20] Günter M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

Ευρετήριο