Φροντιστήριο Διακριτών Μαθηματικών

Γεώργιος Τζούμας

31 Μαΐου 2007

Εβδομάδα 1 (7-11/5)

1. [Το ξενοδοχείο του Hilbert] Έστω ένα ξενοδοχείο με απείρως αριθμήσιμο πλήθος δωματίων που είναι όλα κατειλημμένα. Σε κάθε δωμάτιο μένει μόνο ένα άτομο. Επιτρέπονται οι μετακινήσεις. (α) Έρχεται ένας νέος πελάτης να μείνει. Χωράει; (β) Τι γίνεται στην περίπτωση που έρθουν απείρως αριθμήσιμοι νέοι πελάτες; (γ) Αν έρθουν απείρως αριθμήσιμα γκρουπ από απείρως αριθμήσιμους πελάτες;

   (α) Ναι, μετατοπίζονται όλοι κατά ένα δωμάτιο. (β) Ελευθερώνω τα περιττά δωμάτια μετακινώντας κάθε πελάτη απ΄ τους ήδη υπάρχοντες από το δωμάτιο k στο δωμάτιο $2k$. Κατόπιν βάζω τους νέους πελάτες στα περιττά δωμάτια $2k+1$. (γ) Ελευθερώνω τα περιττά δωμάτια όπως προηγουμένως. Στη συνέχεια για το j-οστό γκρουπ επιλέγω τον j-οστό πρώτο αριθμό (3, 5, 7, 11, 13, 17, $\ldots$) και τοποθετώ τον i-οστό πελάτη του γκρουπ στην i-οστή δύναμη αυτού του αριθμού, π.χ. $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $\ldots$, $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $\ldots$

2. [Liu, άσκ. 1.26, σελ. 46]

   (α) ΝΔΟ το σύνολο των θετικών ρητών $\mathbb{Q}^+$ είναι αριθμήσιμο

$$q = \frac{x}{y},\ \mathbb{Q}^+ = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N},\ x \neq 0,\ y \neq 0\}$$

$$f(x, y) : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$$

$s = x + y$	(x, y)	$f(x, y)$
2	$(1, 1)$	0
3	$(1, 2)$	1
3	$(2, 1)$	2
4	$(1, 3)$	3
4	$(2, 2)$	4
4	$(3, 1)$	5
5	$(1, 4)$	6
5	$(2, 3)$	7
5	$(3, 2)$	8
5	$(4, 1)$	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Αναπαριστώ τα ζεύγη (x, y) με σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο. Απαριθμώ τα σημεία κινούμενος πάνω στις διαγωνίους παράλληλες με την ευθεία $y = -x$. Παίρνω τα σημεία με ίδιο άθροισμα συντεταγμένων $s = x+y \iff y = -x+s$. Πρόκειται για την εξίσωση της διαγωνίου πάνω στην οποία βρίσκονται τα σημεία με ίδιο άθροισμα συντεταγμένων. Μπορώ τώρα να βρω τη συνάρτηση f χρησιμοποιώντας τον τύπο για το άθροισμα όρων αριθμητικής προόδου (υπάρχουν $(s-1)$ σημεία με άθροισμα συντεταγμένων s).

$$f(x, y) = \frac{s(s-1)}{2} - y$$

Απόδ. ότι είναι 1-1. Για ίδιο s, διαφοροποιείται λόγω του y. Για διαφορετικό s, το $s(s-1)/2$ επηρρεάζει πιο πολύ, μιας και $1 \leq y \leq s-1$.

(β) Η ένωση αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμη

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} s_i.$$

Έστω $x_{ij} \in s_i$ ένα στοιχείο της ένωσης που αντιπροσωπεύει το j-οστό στοιχείο του συνόλου s_i. Τότε υπάρχει 1-1 αντιστοιχία με το $\mathbb{Q}^+$ ως j/i.

3. Το δυναμοσύνολο του $\mathbb{N}$ δεν είναι αριθμήσιμο.

Διαγωνοποίηση. Έστω ότι είναι αριθμήσιμο, οπότε απαριθμώ τα στοιχεία του...

υποσύνολο του $\mathbb{N}$	στοιχεία		δυαδική ακολουθία				
s_0	$\{1,3\}$	$\rightarrow$	$\boxed{0}$	1	0	1	$0\ldots$
s_1	$\{0,1,2\}$	$\rightarrow$	1	$\boxed{1}$	1	$0\ldots$	
$\vdots$					$\ddots$		
s_i	$\{1\}$	$\rightarrow$	0	1	$0\ldots$	$\boxed{0}$	$\ldots$
$\vdots$						$\ddots$	
s_j	$\{0,2\}$	$\rightarrow$	1	0	1	$0\ldots$	$\boxed{0}\ldots$
$\vdots$							$\ddots$

Το ψηφίο στη θέση i (ξεκινώντας από το 0) της δυαδικής ακολουθίας είναι 1 αν και μόνο αν το i ανήκει στο υποσύνολο. Παίρνω το *αντίστροφο* bit από κάθε στοιχείο της διαγωνίου, δηλ. θεωρώ το υποσύνολο $s \in 2^{\mathbb{N}}$ με στοιχεία $i \in s \iff i \notin s_i \forall i \in \mathbb{N}$. Τότε το s (στο παράδειγμα $s = \{0, \ldots, i, j, \ldots\}$) είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$ που δεν ανήκει στην παραπάνω λίστα, αφού διαφέρει με κάθε στοιχείο.

Εβδομάδα 2 (14-19/5)

1. [Liu, άσκ. 1.32] Οποιεσδήποτε δύο μπάλες του μπιλιάρδου έχουν το ίδιο χρώμα...

   Λανθασμένη επαγωγική υπόθεση: Ο συλογισμός δεν ισχύει για ν=2

2. [Liu, παράδ. 1.7]

3. [Χ. Κοναξής] Δείξτε ότι ο αριθμός των διαγωνίων σε ένα κυρτό πολύγωνο με n κορυφές είναι $\frac{1}{2}n(n-3)$, $(n \geq 4)$.

   Βάση. Για $n = 4$, έχουμε τετράπλευρο που έχει δύο διαγωνίους.
   Βήμα επαγωγής. Έστω ότι πολύγωνα με k κορυφές έχουν $\frac{1}{2}k(k-3)$ διαγωνίους. Προσθέτουμε μία κορυφη P_{k+1} στο k-γωνο και θέλουμε να δείξουμε ότι το πλήθος των διαγωνίων ειναι $\frac{1}{2}(k+1)(k-2)$. Έχουμε τις παλιές διαγωνίους και όσες νέες μπορούμε να φέρουμε. Άρα το πλήθος των διαγωνίων είναι $\frac{1}{2}k(k-3)$ και όσες μπορούμε να φέρουμε από την κορυφή P_{k+1} στις κορυφές $P_2, P_3, \ldots, P_{k-1}$, δηλαδή $k-2$. Η πλευρά P_1P_k του παλιού πολυγώνου έγινε διαγώνιος στο νεο. Εχουμε: $\frac{1}{2}k(k-3)+(k-2)+1 = \frac{1}{2}[k(k-3)+2k-2] = \frac{1}{2}(k^2-k-2) = \frac{1}{2}(k+1)(k-2)$.

4. [Χ. Κοναξής] Ο $n-$οστός περιττός αριθμός είναι ο $2n-1$. Δείξτε ότι το άθροισμα των n πρώτων περιττών αριθμών είναι $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$.

   Βάση. Για $n = 1$, ισχύει.
   Βήμα της επαγωγής. Έστω $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$. Θα δείξουμε ότι $1+3+5+\ldots+(2(n+1)-1) = (n+1)^2$. Πράγματι $1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1) \overset{(\mathrm{EY})}{=} n^2+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$.

5. [Χ. Κοναξής] [Liu, άσκ. 1.56]

   (α) Ζητάμε τον πληθικό αριθμό του συνόλου $\Omega \setminus \{K \cup G \cup P\}$.
   $|K \cup G \cup P| = |K| + |G| + |P| - |K \cap G| - |K \cap P| - |G \cap P| + |K \cap G \cap P| = 595 + 595 + 550 - 395 - 350 - 400 + 250 = 845$.

   (β) $|K| - |K \cap P| - |K \cap G| + |K \cap G \cap P| = 595 - 350 - 395 + 250 = 100$.

   Κάνουμε διαγράμματα Venn.

Εβδομάδα 3 (21-25/5)

1. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$. Παραδείγματα για $\mathrm{F} \to \mathrm{T}$ κλπ.

2. Κυκλικές μεταθέσεις n αντικειμένων.

$$mn = n! \iff m = (n-1)!$$

3. [Liu, άσκ. 3.2] $x - y \leq 7\ldots$

   (α) 93

   (β) Αναπαριστούμε τα ζεύγη με σημεία στο επίπεδο. Μετράμε τα σημεία στο φράσσονται από την $y = x - 7$. Αποτέλεσμα 5722.

4. [Liu, άσκ. 1.73]

   Παρατηρώ ότι $A(q) \equiv p \leftrightarrow q$. Άρα $A(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \equiv q$. Αν και μόνο αν λες αλήθεια, το αριστερό παρακλάδι οδηγεί στην πόλη;

Εβδομάδα 4 (28/5-1/6)

1. [Liu, άσκ. 3.13] Καρκινικές λέξεις με 7 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου.

$$24^4$$

2. [Liu, άσκ. 3.15] Σχήμα «σταυρός».

   (α) $2^9 = 512$

   (β) Βρίσκω πόσα είναι συμμετρικά: $2^7 = 128$. Άρα 512-128=384.

3. [Liu, άσκ. 3.17] Σειρά 20 θέσεων, 3 ομάδες 5 συνεχόμενων θέσεων.

   - Α΄ τρόπος. Απαριθμώ: (1,6,11), (1,6,12), $\ldots$, (1,7,12), (1,7,13), $\ldots$, (2,7,12), $\ldots$, (6,11,16). Συνολικά έχω $(6+5+4+3+2+1)+(5+4+3+2+1)+\ldots+(2+1)+1 = 56$ τρόπους. Άρα τελικά έχω $56 \cdot 3! = 336$.
   - Β΄ Τρόπος. Έχω 8 αντικείμενα: (5θ) (5θ) (5θ) (θ) (θ) (θ) (θ) (θ). Άρα τελικά $8!/5! = 336$.

4. Κινούμαι σε ένα πλέγμα ακεραίων Με πόσους τρόπους μπορώ να φτάσω από το $(0,0)$ στο (n,m) κινούμενος είτε ένα βήμα δεξιά είτε ένα πάνω;

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

Εβδομάδα 5 (4-8/6)

1. [Liu, άσκ. 3.25] $A+B=2C,\ A+B+C=15$

$$\binom{15}{5}2^{10},\ \text{αν} \geq 0 \text{ βιβλία}$$

$$\binom{15}{5}(2^{10}-2),\ \text{αν} \geq 1 \text{ βιβλία}$$

2. Έστω A και B πεπερασμένα σύνολα. Πόσες είναι οι συναρτήσεις $f : A \to B$; Πόσες είναι 1-1;

   (α) Έστω $a = |A|$ και $b = |B|$. Το πλήθος των συναρτήσεων είναι

$$b^a$$

   .

   (β)

$$\binom{b}{a}a! = P(b,a), \quad \text{εφόσον } b \geq a$$

   .

3. [Liu, άσκ. 3.34] Διαιρώ $2n$ άτομα σε n ζευγάρια.

$$\binom{2n}{n}n!\frac{1}{\underbrace{(2!)(2!)\cdots(2!)}_{n}} = \binom{2n}{n}n!\frac{1}{2^n}$$