Δειγματοληψία και ανακατασκευή αναλογικών σημάτων

Ο συνεχούς χρόνου μετασχηματισμός Fourier (CTFT), $X_a(w)$, ή το φάσμα ενός αναλογικού σήματος $x_a(t)$ είναι

$$X_a(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jw\,t}\, dt$$

Όπου w είναι η αναλογική συχνότητα σε radian/sec. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier είναι

$$x_a(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(w)\; e^{jw\,t}\, dw$$

Αν το αναλογικό σήμα $x_a(t)$ δειγματοληπτηθεί με περίοδο δειγματοληψίας T_s παράγεται το σήμα διακριτού χρόνου.

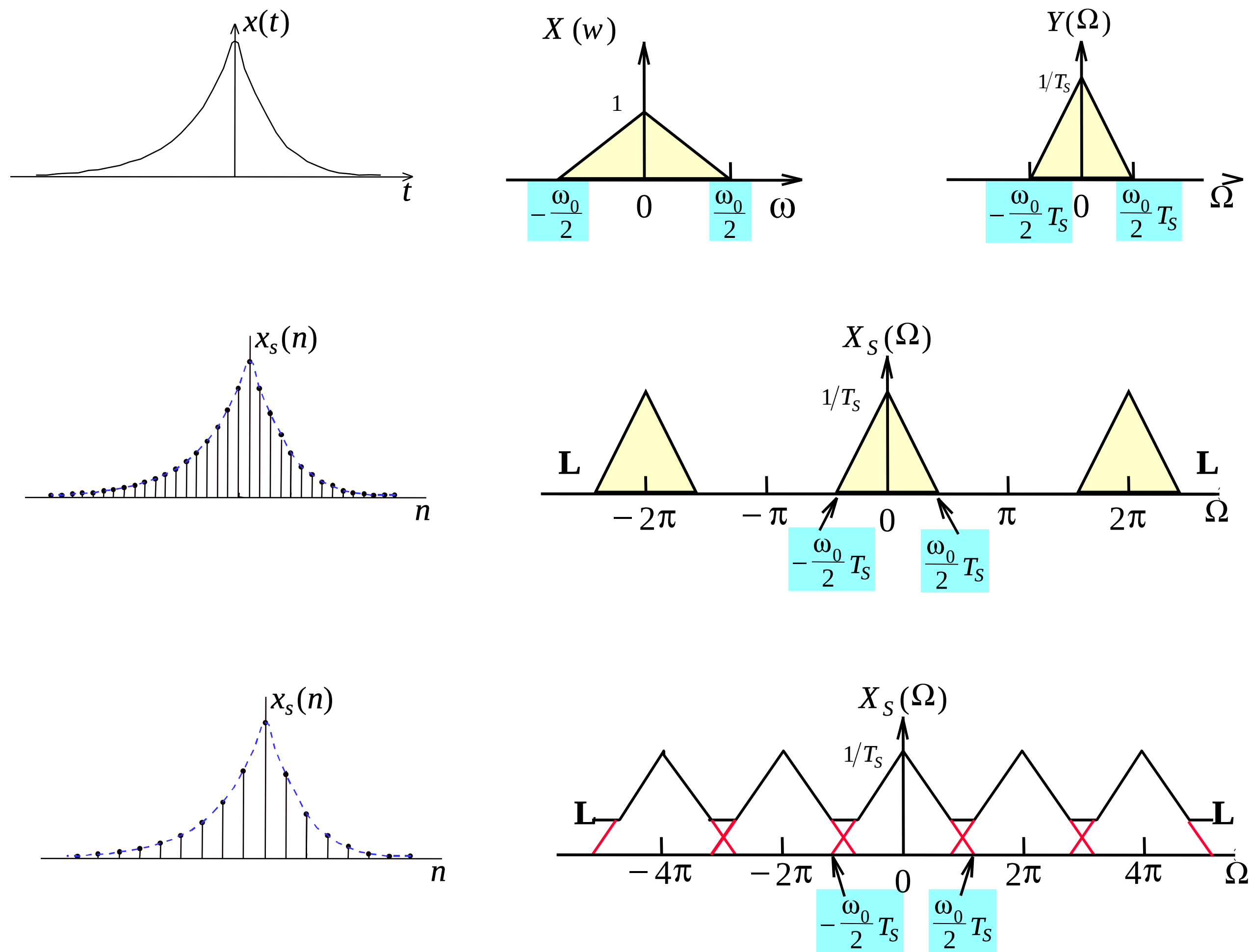
$$x_s(n) \equiv x_a(n\,T_s)$$

Ο διακριτού χρόνου μετασχηματισμός Fourier (DTFT), $X_S\,(\Omega)$, του διακριτού σήματος $x\,(n)$ είναι

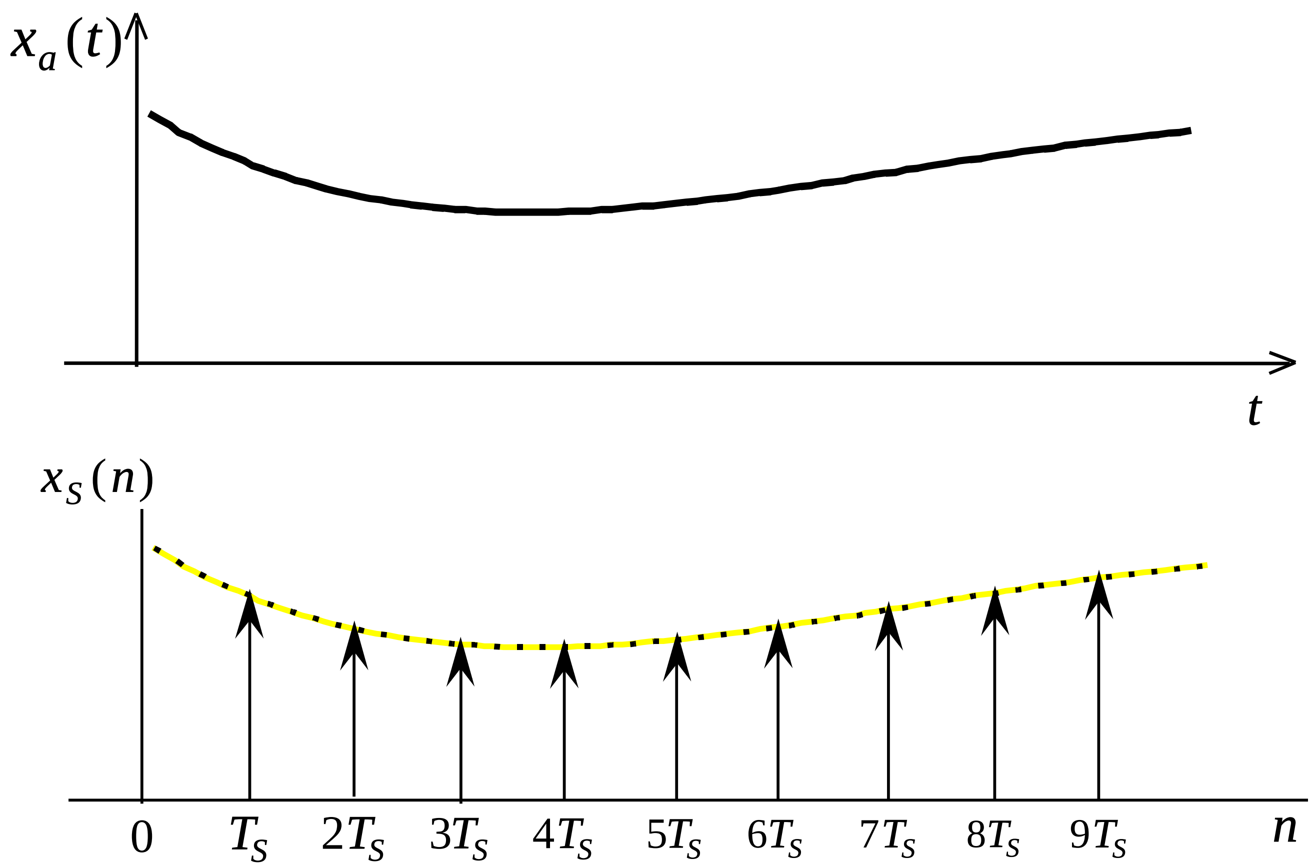
$$X_S(\Omega) = \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\Omega}{T_S} + \frac{2kp}{T_S} \right)$$

Όπου $\Omega = w \cdot T_S$ και δεν έχει διαστάσεις. Είναι επίσης $F_S = \dfrac{1}{T_S}$, $\dfrac{deig.}{\sec}$.

$$X_S(\Omega) = \frac{1}{T_S}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\Omega}{T_S} + \frac{kp}{T_S}\right) \qquad ή \qquad X_S(wT_S) = \frac{1}{T_S}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(w + \frac{2kp}{T_S}\right)$$

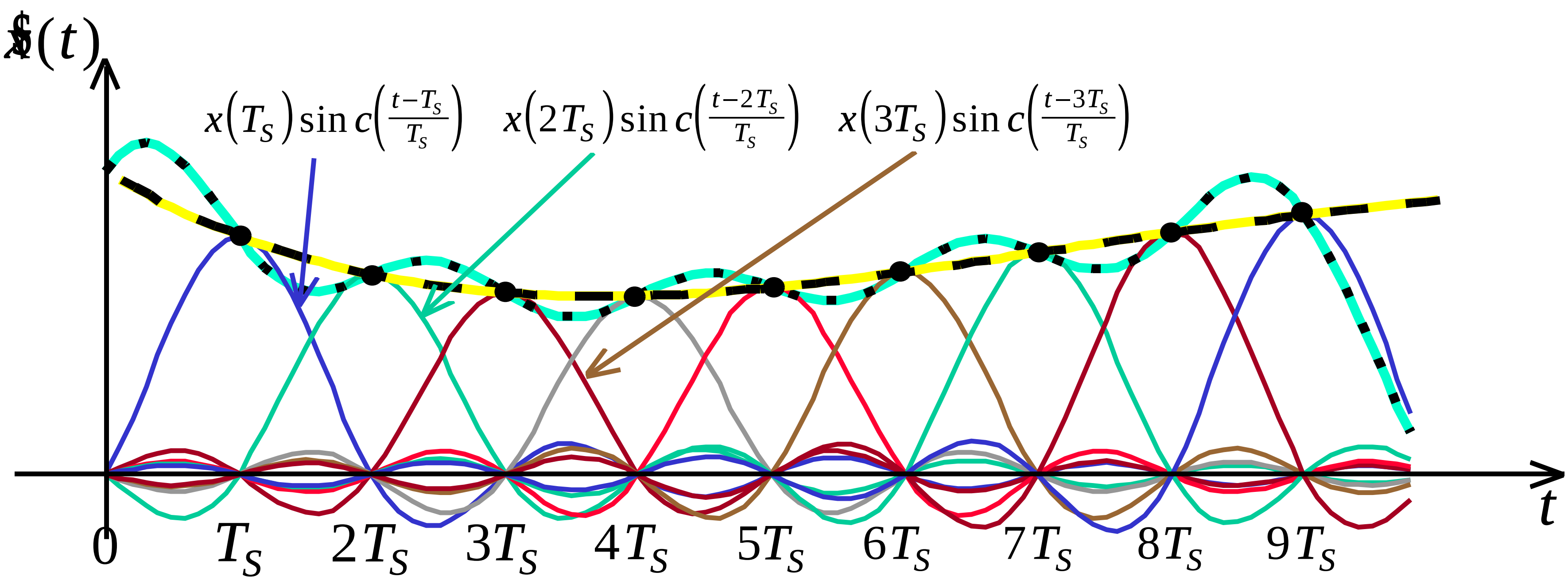


Θεώρημα δειγματοληψίας



Το σήμα ανακατασκευάζεται από τη σχέση

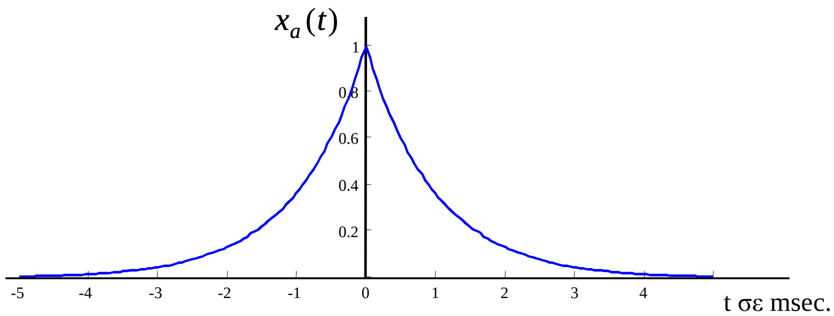
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_S)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT_S}{T_S}\right)$$



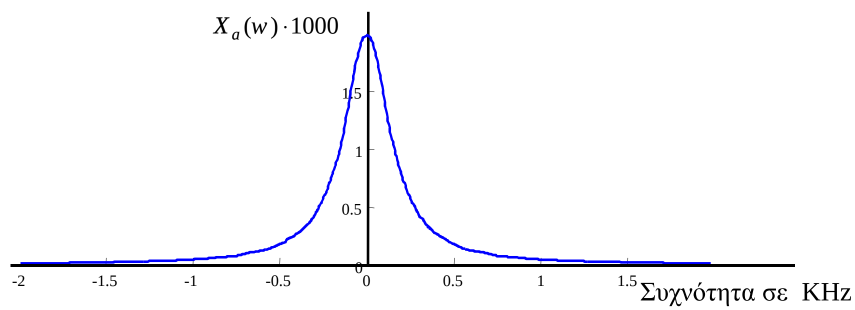
Δίνεται το αναλογικό σήμα $x_a(t) = e^{-1000|t|}$ Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος $x(n)$ το οποίο προκύπτει από το αναλογικό σήμα με δειγματοληψία στις συχνότητες F_S=5000 δείγματα/sec και F_S=1000 δείγματα/sec .

```
% Αναλογικό σήμα
Dt = 0.00005;
t = -0.005:Dt:0.005;
xa = exp(-1000*abs(t));
% Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου
Wmax = 2*pi*2000;
K = 500; k = 0:1:K;
W = k*Wmax/K;
Xa = xa * exp(-j*t'*W) * Dt;
Xa = real(Xa);
W = [-fliplr(W), W(2:501)]; % Συχνότητα από -
Wmax to Wmax
Xa = [fliplr(Xa), Xa(2:501)];
subplot(1,1,1)
subplot(2,1,1);plot(t*1000,xa);
xlabel('t σε msec.'); ylabel('xa(t)')
title('Analog Signal')
subplot(2,1,2);plot(W/(2*pi*1000),Xa*1000);
xlabel('Συχνότητα σε KHz'); ylabel('Xa(jW)*1000')
title('Μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου ')
```

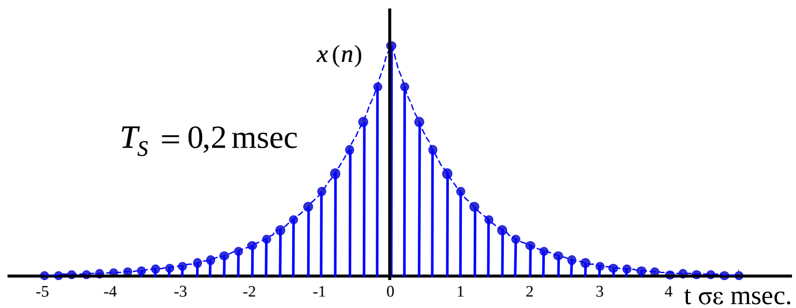
```
% Αναλογικό σήμα
Dt = 0.00005;
t = -0.005:Dt:0.005;
xa = exp(-1000*abs(t));
% Διακριτό σήμα
Ts = 0.001; n = -5:1:5;
x = exp(-1000*abs(n*Ts));
% Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier
K = 500; k = 0:1:K;
w = pi*k/K;
X = x * exp(-j*n'*w);
X = real(X);
w = [-fliplr(w), w(2:K+1)];
X = [fliplr(X), X(2:K+1)];
subplot(1,1,1)
subplot(2,1,1);plot(t*1000,xa);
xlabel('t σε msec.'); ylabel('xa(t)')
title('Διακρτιτό Σήμα'); hold on
stem(n*Ts*1000,x);
gtext('Ts=1 msec');
hold off
subplot(2,1,2);plot(w/pi,X);
xlabel('Συχνότητα σε KHz'); ylabel('X(w)')
title ('Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier')
```

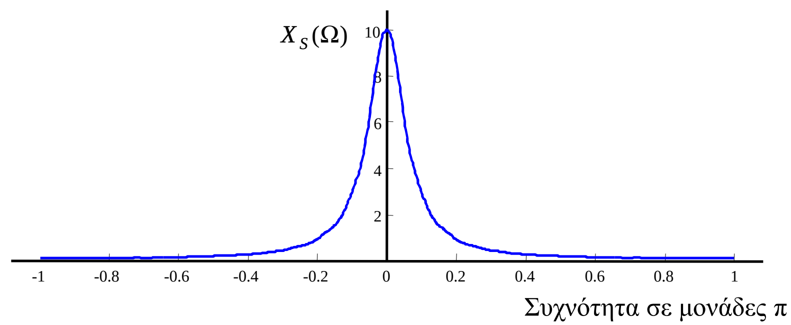


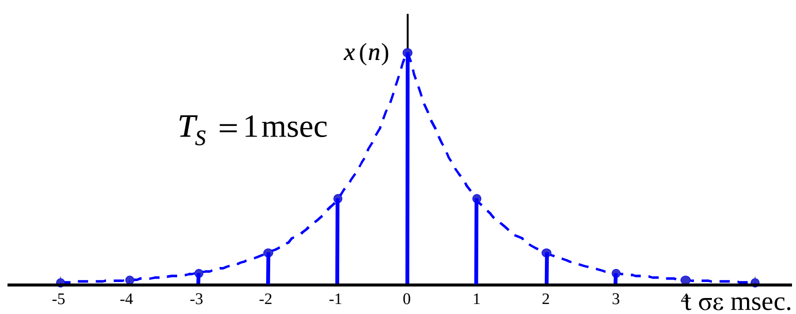
Αναλογικό σήμα



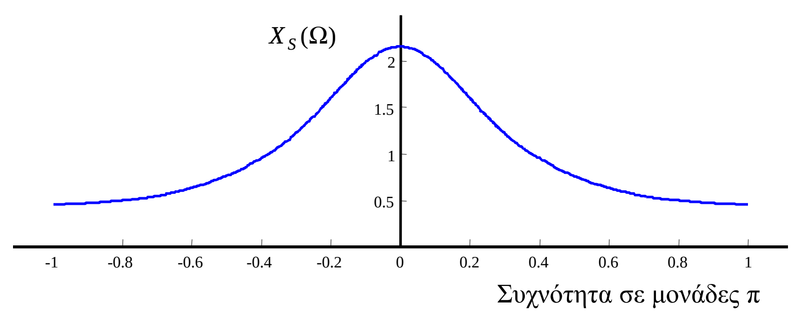
Μετασχηματισμός **Fourier** *συνεχούς χρόνου*







Διακριτό σήμα



Μετασχηματισμός **Fourier** *διακριτού χρόνου*

D/A μετατροπείς

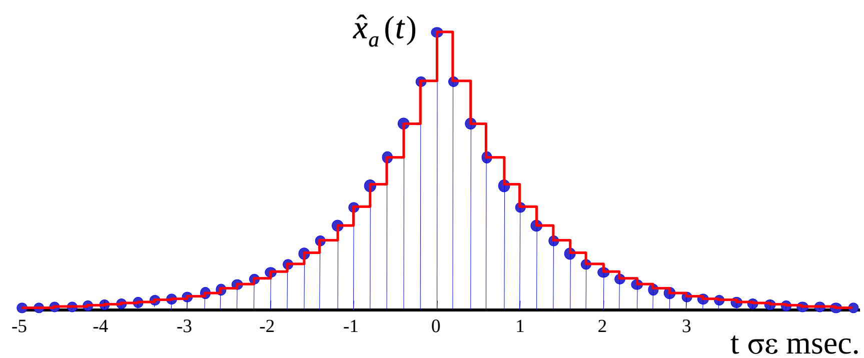
- Zero-order-hold (ZOH) παρεμβολή

$$\hat{x}_a(t) = x(n), \qquad nT_S \le n < (n+1)T_S$$

Η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le T_S \\ 0, & a\ l\ l\ iw V \end{cases}$$

```
figure(1); clf
% Σήμα διακριτού χρόνου x (n) : Ts = 0.0002
Ts = 0.0002; n = -25:1:25; nTs = n*Ts;
x = exp(-1000*abs(nTs));
% Ανακατασκευή σήματος με ZOH παρεμβολή
subplot(2,1,1); stairs(nTs*1000,x);
xlabel('t σε msec.'); ylabel('xa(t)')
title('Ανακατασκευή σήματος x (n) χρησιμοποιώντας ZOH');
hold on
stem(n*Ts*1000,x);
hold off
```



Ανακατασκευή σήματος x (n) χρησιμοποιώντας ZOH

- First-order-hold (FOH) παρεμβολή

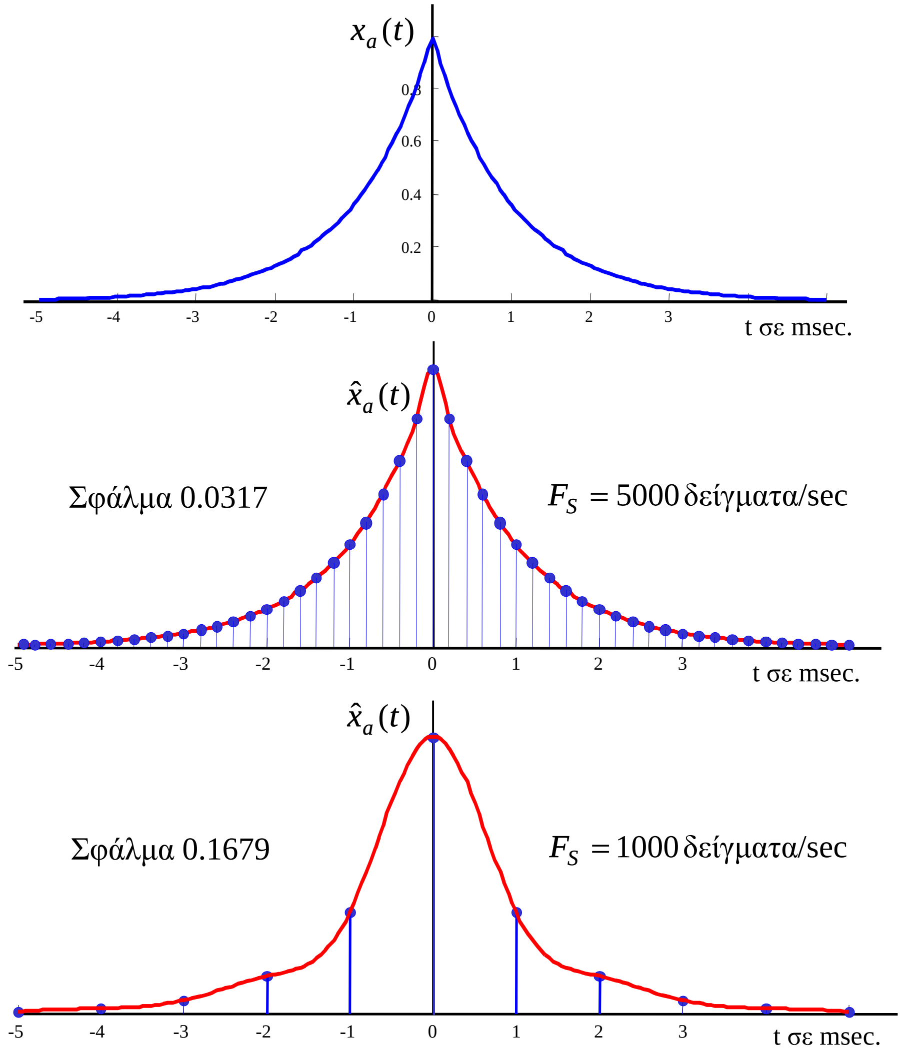
Η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{t}{T_S}, & 0 \le t \le T_S \\ 1 - \dfrac{t}{T_S}, & T_S \le t \le 2T_S \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\hat{x}_a(t) = a_0(n) + a_1(n)(t - nT_S) + a_2(n)(t - nT_S)^2 + a_3(n)(t - nT_S)^3, \qquad nT_S \le n < (n+1)T_S$$

Cubic spline παρεμβολή

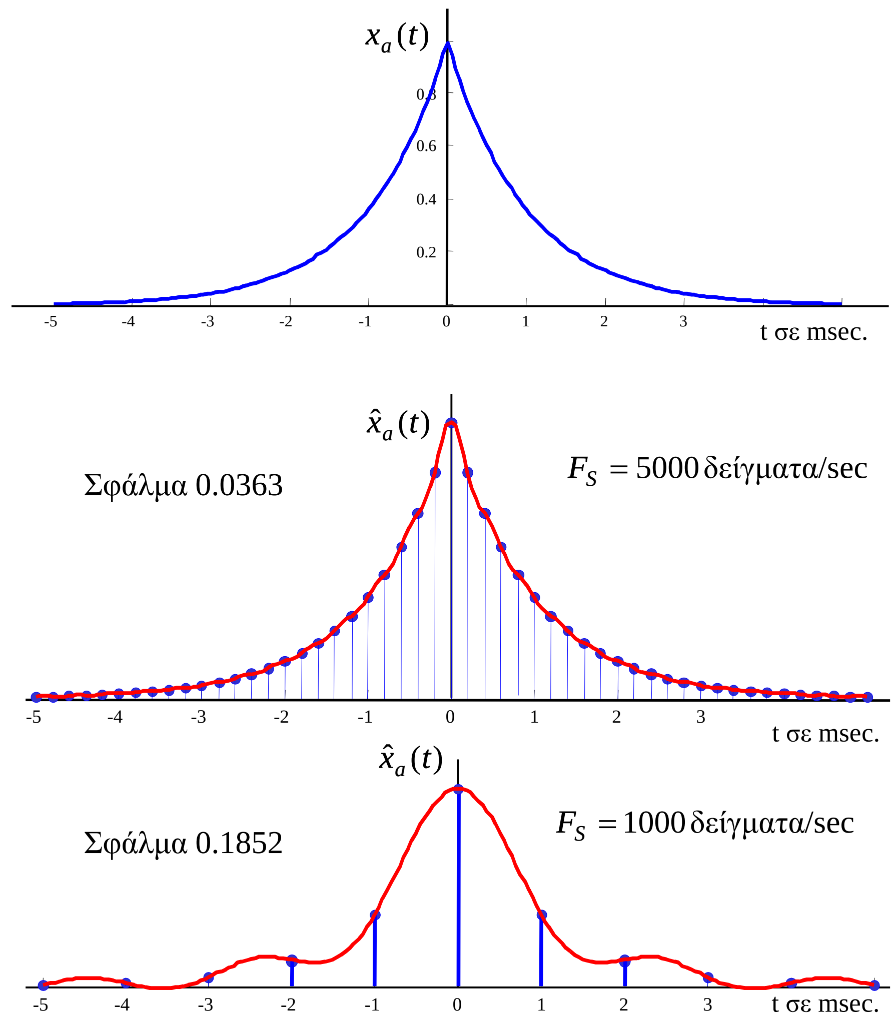
```
Ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του
χρησιμοποιώντας cubic splines παρεμβολή
figure(1); clf
Ts = 0.0002;
n = -25:1:25;
nTs = n*Ts;
x = exp(-1000*abs(nTs));
% Ανακατασκευή αναλογικού σήματος
Dt = 0.00005;
t = -0.005:Dt:0.005;
xa = spline(nTs,x,t);
% Έλενχος
error = max(abs(xa - exp(-1000*abs(t))))
subplot(2,1,1); plot(t*1000,xa);
xlabel('t in msec.'); ylabel('xa(t)')
title('Ανακατασκευή του σήματος από τα δείγματά του
x(n) χρησιμοποιώντας cubic splines παρεμβολή');
hold on
stem(n*Ts*1000,x);
hold off
```



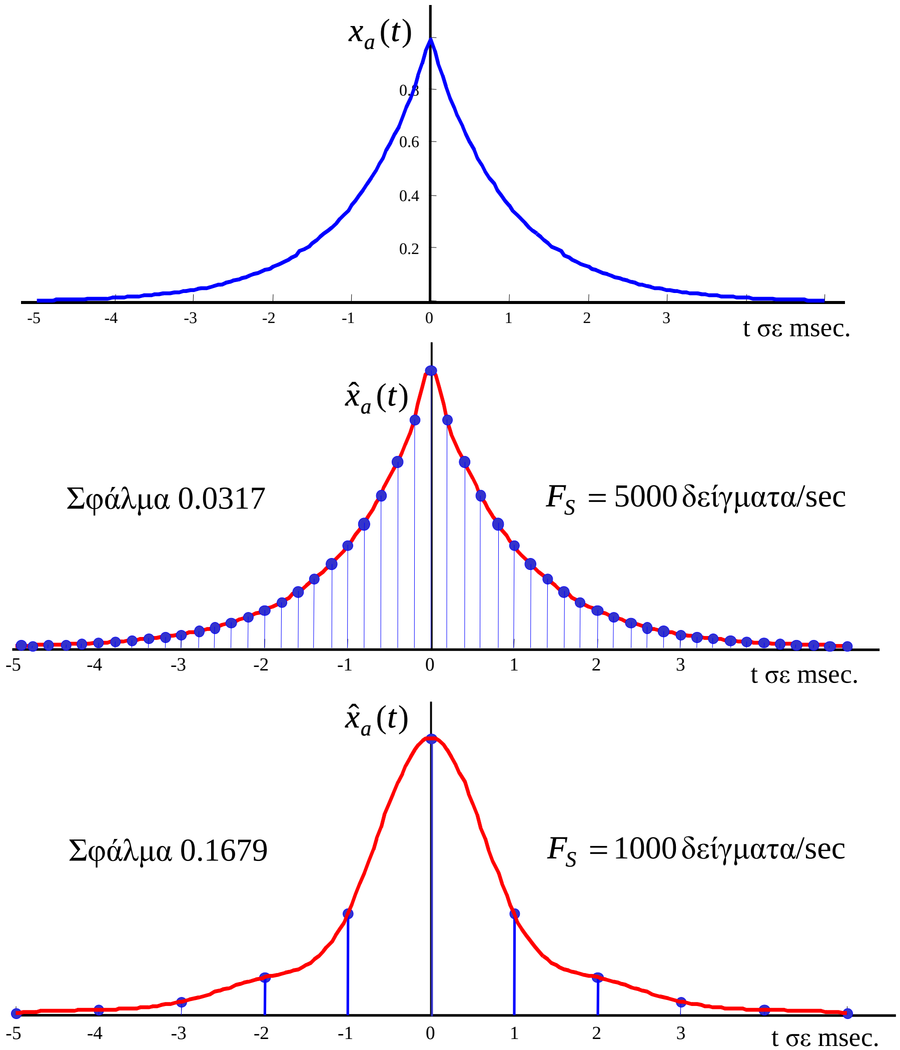
Ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του χρησιμοποιώντας cubic splines παρεμβολή

Ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση δειγματολειψίας

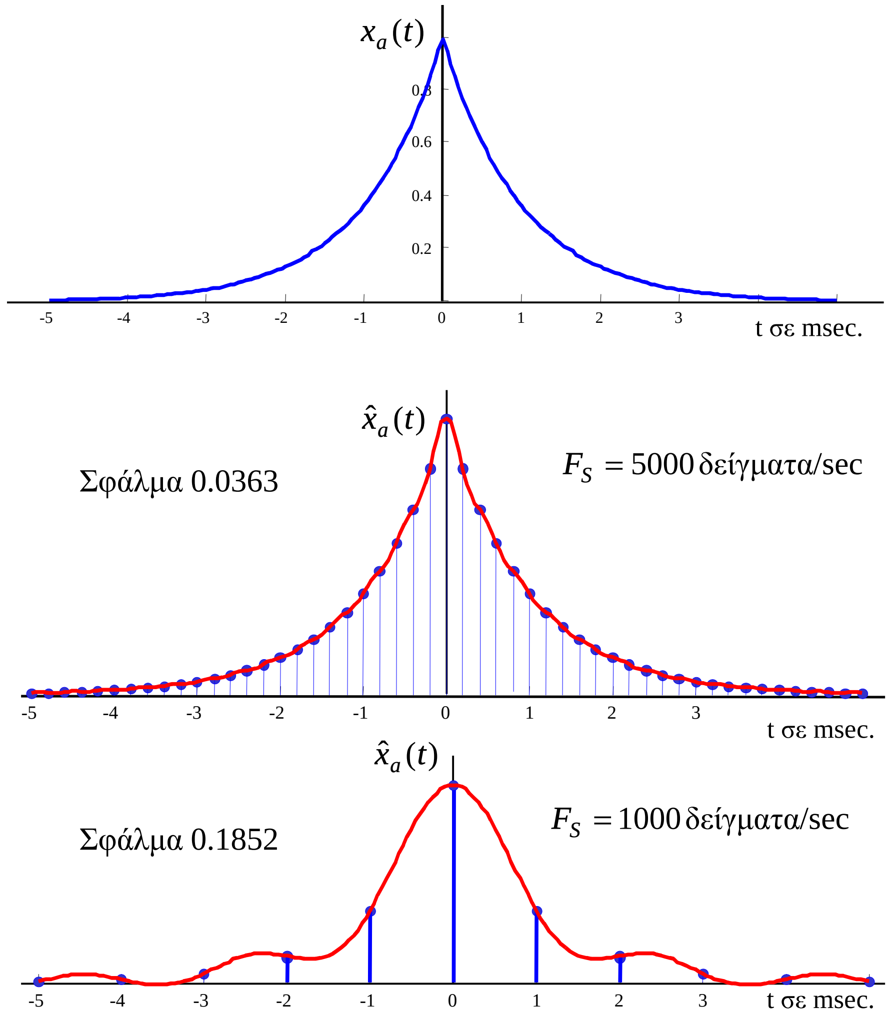
```
%Ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του
χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση sinc
%
% Σήμα διακριτού χρόνου x(n)
Ts = 0.0002;
Fs = 1/Ts;
n = -25:1:25;
nTs = n*Ts;
x = exp(-1000*abs(nTs));
% Ανακατασκευή αναλογικού σήματος
Dt = 0.00005;
t = -0.005:Dt:0.005;
xa = x * sinc(Fs*(ones(length(nTs),1)*t-
nTs'*ones(1,length(t))));
% Έλενχος
error = max(abs(xa - exp(-1000*abs(t))))
subplot(1,1,1)
subplot(2,1,2); plot(t*1000,xa);
xlabel('t in msec.'); ylabel('xa(t)')
title('Ανακατασκευή σήματος από τα x(n)
χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση sinc');
hold on
stem(n*Ts*1000,x);
hold off
```



Ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση sinc



Ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του χρησιμοποιώντας ***cubic splines*** *παρεμβολή*



Ανακατασκευή σήματος από τα δείγματά του χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ***sinc***

ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ

$$x_a(t) \xleftrightarrow{F} X_a(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t)\, e^{-j2p\, f\, t} d\, t$$

Αν δειγματοληπτήσουμε ομοιόμορφα το φάσμα $X_a(f)$ με περίοδο έχουμε

$$T_S = \frac{1}{d\, f}$$

$$X_a(k\, d\, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t)\, e^{-j2p\; kdf\, t} d\, t$$

$$X_a(k\, d\, f) = \int_{-T_S/2}^{+T_S/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(t - n\, T_s)\right] e^{-j2p\; kdf\, t} d\, t$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(t - n\, T_s)$$

Αν $x_a(t) = 0$ για $|t| > t$ και επιλέξουμε $T_S > 2t$ τότε δεν έχουμε χρονική αλλοίωση και το φάσμα του σήματος $X_a(f)$ μπορεί επιτυχώς να ανακατασκευαστεί από τα δείγματα του $X_a(k\,d\,f)$ με τη βοήθεια της σχέσης:

$$X_a(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(k\,d\,f)\,\mathrm{sinc}\left[\frac{p}{d\,f}\left(f - k\,d\,f\right)\right]$$

ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j2p\,F\,n}$$

Αν δειγματοληπτήσουμε ομοιόμορφα το φάσμα $X(F)$ σε N σημεία στο διάστημα $0 \le \Omega < 2p$ δηλαδή $\Omega = \frac{2p}{N}$ έχουμε

$$X\left(\frac{2p}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-jk\frac{2p}{N}n} \qquad k = 0,\ 1,\ \mathbf{K},\ N-1$$

καταλήγουμε:

$$X\left(\frac{2p}{N}k\right) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(n-l\,N)\right] e^{-jk\frac{2p}{N}n}$$