Ο Ρ Ι Σ Μ Ο Σ

Ο μετασχηματισμός z αντιστοιχεί στην ακολουθία $x(n)$ τη συνάρτηση:

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

Ο Μετασχηματισμός z , $X(z)$, της ακολουθίας $x(n)$ είναι μιγαδική συνάρτηση, της μιγαδικής μεταβλητής $z = r \cdot e^{j\Omega}$

Ο *μονόπλευρος μετασχηματισμός* z ορίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{X}(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

- Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός z του τετραγωνικού παραθύρου πλάτους *N+1*.

$$x(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le N\\ 0, & a\;l\;l\;i w\&V\end{cases}$$

Απάντηση

$$X(z)=\begin{cases} z^{-N}\dfrac{z^{N+1}-1}{z-1}=\dfrac{z^{N+1}-1}{z^{N}(z-1)}, & z\neq 1, z\neq 0\\ \\ N+1, & z=1\end{cases}$$

Η περιοχή σύγκλισης καλύπτει όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από το μηδέν.

- Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός z του αιτιατού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου:

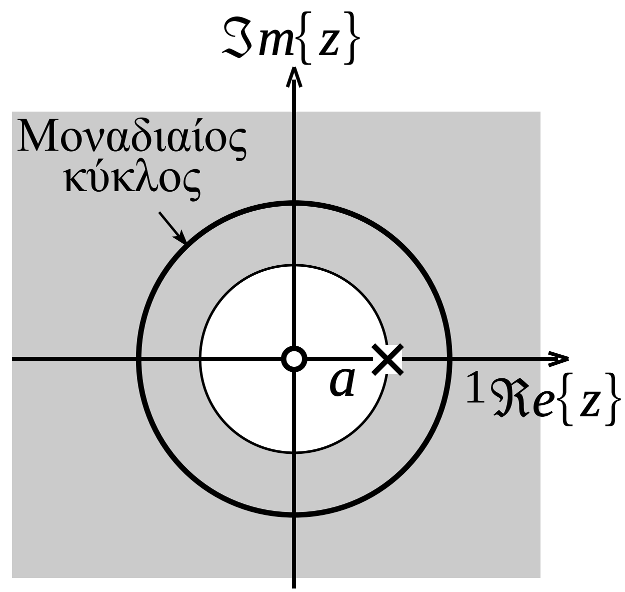
$$x(n) = a^n u(n)$$ όπου α πραγματικός αριθμός

Απάντηση

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a},$$

Με περιοχή σύγκλισης:

$$|z| > |a|$$



■ Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός z του αυστηρά μη αιτιατού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου:

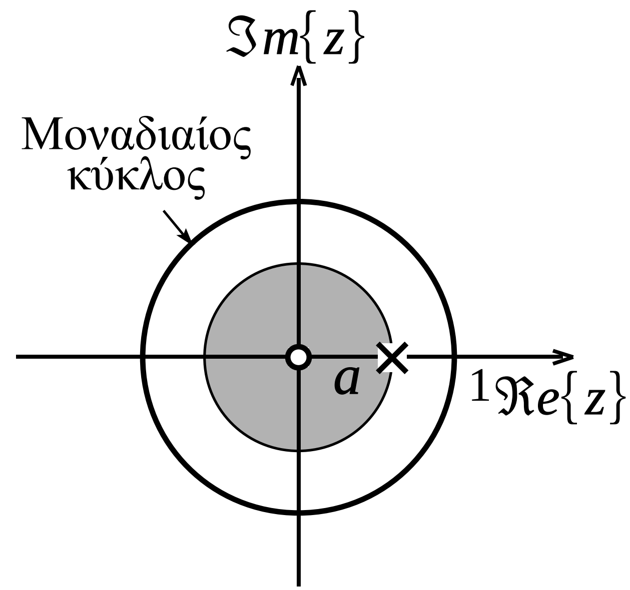
$$x(n) = -a^n u(-n-1)$$ όπου α πραγματικός αριθμός

Απάντηση

$$X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z-a},$$

Με περιοχή σύγκλισης το εσωτερικό κύκλου ακτίνας

$$R_x > |a|$$



- Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός z του σήματος:

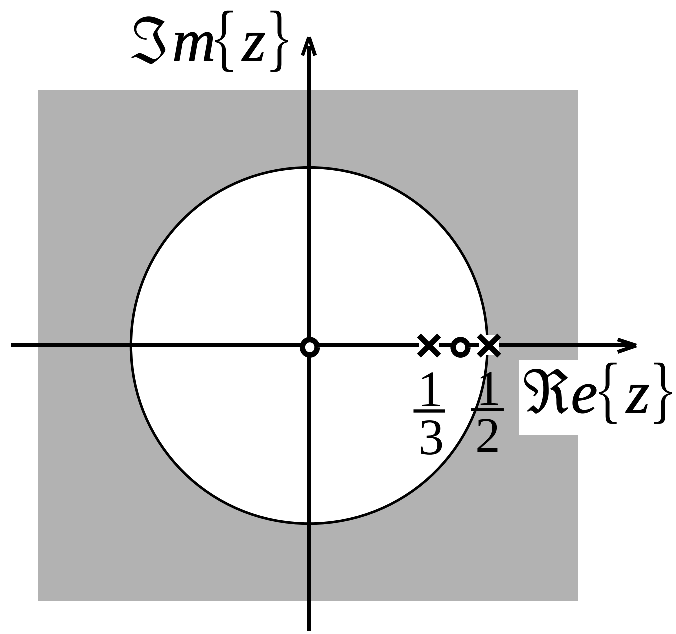
$$x(n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\tfrac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Απάντηση

$$X(z) = \frac{z\left(2z - 5/6\right)}{\left(z - 1/2\right)\left(z - 1/3\right)}$$

Με περιοχή σύγκλισης

$$|z| > \tfrac{1}{3}$$



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ z

- **Γραμμικότητα**

$$a \cdot x_1(n) + b \cdot x_2(n) \xleftrightarrow{Z} a \cdot X_1(z) + b \cdot X_2(z)$$

- **Ιδιότητα της χρονικής ολίσθησης**

$$x(n+n_0) \quad \xleftrightarrow{Z} \quad z^{n_0} X(z)$$

- **Ιδιότητα της παραγώγισης στο πεδίο του z**

$$n\,x(n) \quad \xleftrightarrow{Z} \quad -z\frac{dX(z)}{dz}$$

- **Ιδιότητα της διαμόρφωσης ή ολίσθησης συχνότητας - κλιμάκωση στο πεδίο του z**

$$c^n\,x(n) \xleftrightarrow{Z} Y(z) = X\left(\tfrac{z}{c}\right)$$

- **Ιδιότητα της συνέλιξης ή συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου**

$$x_1(n) * x_2(n) \quad \xleftrightarrow{Z} \quad X_1(z) \cdot X_2(z)$$

Ο ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ z

$$\mathrm{X}(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

- **Ιδιότητα της δεξιάς ολίσθησης - Καθυστέρηση**

$$x(n-n_0) \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0}\mathrm{X}(z) + z^{-n_0}\sum_{i=1}^{n_0} x(-i)\, z^{i} \quad \text{για κάθε } n_0 \geq 1$$

- **Ιδιότητα της αριστερής ολίσθησης - Προήγηση**

$$z^{-n_0}\mathrm{Z}\{x(n+n_0)\} = \mathrm{X}(z) - \sum_{i=0}^{n_0-1} x(i)\, z^{-i} \quad \text{για κάθε } n_0 \geq 1$$

Ο ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ z

$$x(n) = \frac{1}{2p\ j} \oint_C X(z)\, z^{n-1} d\, z$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ z ΓΙΑ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- Να υπολογιστεί το σήμα το οποίο έχει μετασχηματισμό z τη συνάρτηση:

$$X(z) = \frac{3 - 5/6\, z^{-1}}{\left(1 - 1/4\, z^{-1}\right)\left(1 - 1/3\, z^{-1}\right)} \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

Απάντηση

$$x(n) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} u(n) + 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n} u(n)$$

■ Να υπολογιστεί το σήμα το οποίο έχει μετασχηματισμό z τη συνάρτηση

$$X(z)=\frac{z}{z^2+z-2}$$

Απάντηση

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{(z+2)(z-1)}=\frac{C_1}{z+2}+\frac{C_2}{z-1}$$

$$X(z)=-\frac{1}{3}\frac{z}{z+2}+\frac{1}{3}\frac{z}{z-1}$$

$2<|z|<\infty \qquad x(n)=\frac{1}{3}(-2)^n u(n)-\frac{1}{3}u(n)$

$1<|z|<2 \qquad x(n)=\frac{1}{3}(-2)^n u(-n-1)-\frac{1}{3}u(n)$

$|z|<1 \qquad x(n)=\frac{1}{3}(-2)^n u(-n-1)-\frac{1}{3}u(-n-1)$

```
b=[0,1];
a=[1,1,-2];
[R,p,C]=residuez(b,a)
R =
  -0.3333
   0.3333
p =
   -2
    1
C =
    []
```

Αν έχει δοθεί ο παρανομαστής σε γινόμενο $(z+2)(z-1)$ τότε

```
a=poly([1,-2])
a =
    1    1   -2
```

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ z

- Να προσδιοριστεί η ακολουθία εξόδου ενός ΓΧΑ διακριτού συστήματος, το οποίο έχει κρουστική απόκριση $h(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3\}$ όταν διεγείρεται από την ακολουθία $x(n)=\{\underset{\uparrow}{3},4,5,2\}$

Απάντηση

```
x=[3,4,5,2];
h=[1,2,3];
y=conv(h,x)
```

$$y(n)=\left\{3,10,22,24,19,6\right\}$$

```
h=[1,2,3];
y=[3,10,22,24,19,6];
x=deconv(y,h)
```

▶ **Συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x(n-k) \qquad \text{με} \qquad a_0 = 1$$

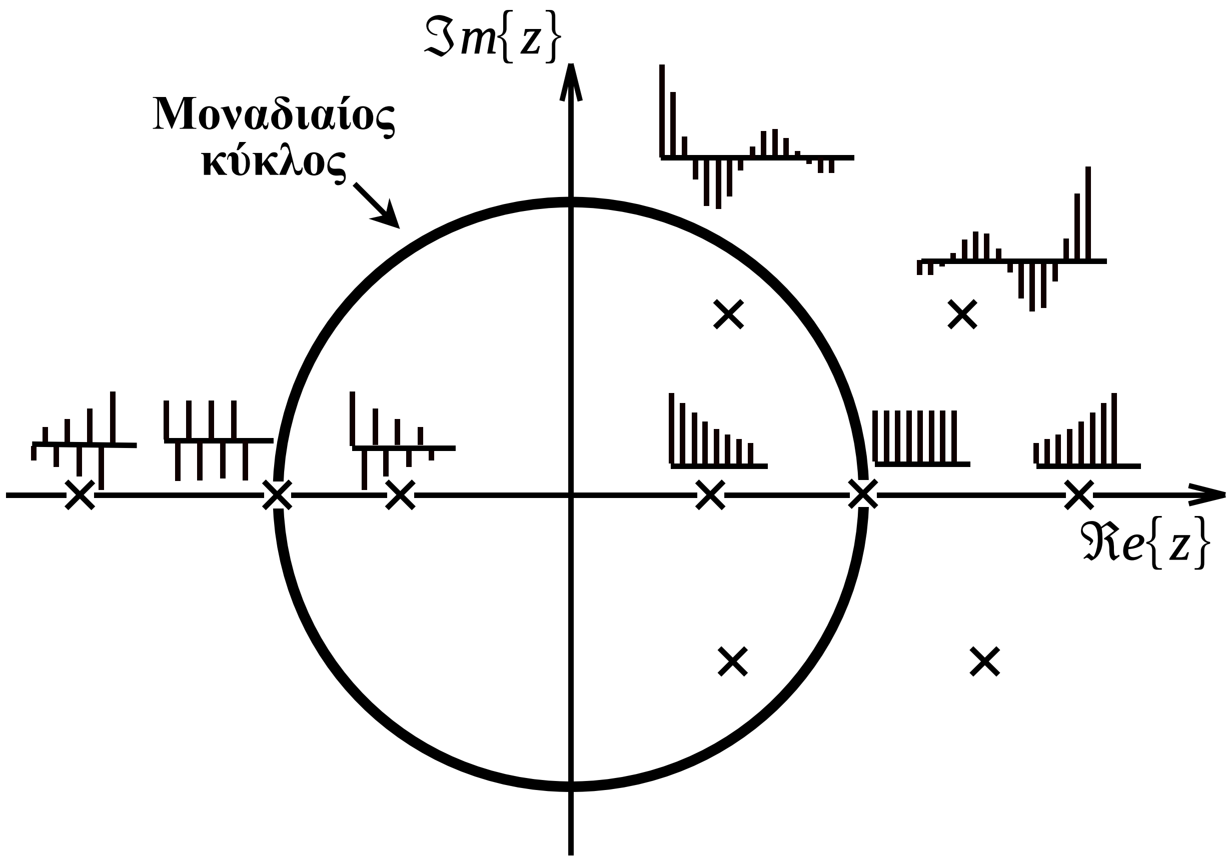
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \, z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k \, z^{-k}} = b_0 z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M} (z - z_k)}{\prod_{k=1}^{N} (z - p_k)}$$

Η ευστάθεια και η αιτιατότητα προσδιορίζουν την περιοχή σύγκλισης

▶ Μελέτη ΓΧΑ συστήματος με τη βοήθεια μετασχηματισμού z

$$H(z) = \frac{C_1 z}{z - l_1} + \frac{C_2 z}{z - l_2} + \ldots + \frac{C_N z}{z - l_N}$$

$$h(n) = \left[C_1 l_1^n + C_2 l_2^n + \ldots + C_N l_N^n\right] u(n)$$



Δίνεται το αιτιατό σύστημα $y(n) = 0{,}9\, y(n\text{-}1) + x(n)$.

α) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και να σχεδιαστεί το διάγραμμα των πόλων και μηδενικών.

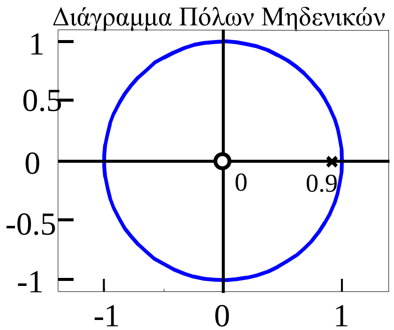
β) Να γίνει η γραφική παράσταση του μέτρου και της φάσης σε συνάρτηση με τη συχνότητα.

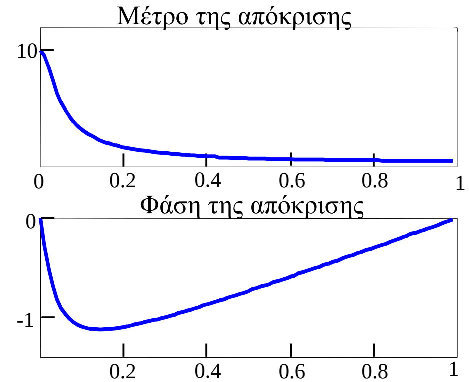
γ) Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k\, z^{-k}} = \frac{1}{1-0{,}9\cdot z^{-1}}, \qquad |z| > 0{,}9 \;\; \text{και} \;\; h(n) = z^{-1}[H(z)] = 0{,}9^{n}\, u(n)$$

```
b = [1,0];
a = [1, -0.9];
zplane(b,a);
 title(' Διάγραμμα Πόλων Μηδενικών ');
text(0.85,-0.1,'0.9');
text(0.01,-0.1,'0');
```

```
b=[1,0];
a=[1, -0.9];
[H,W]=freqz(b,a,100);
subplot(2,1,1); plot(W/pi,abs(H));
title(' Μέτρο της απόκρισης ')
subplot(2,1,2); plot(W/pi,angle(H));
title(' Φάση της απόκρισης ')
```





Δίνεται το αιτιατό σύστημα

$$H(z) = \frac{z+1}{z^2 - 0{,}9\,z + 0{,}81}$$

α) Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας.

β) Να βρεθεί η εξίσωση διαφορών.

γ) Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Το σύστημα έχει πόλους στα σημεία $z = 0{,}9\angle \pm p\,/\,3$ και η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| > 0{,}9$ επειδή το σύστημα είναι αιτιατό. Έτσι η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(\Omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{e^{j\Omega}+1}{e^{j2\Omega} - 0{,}9\,e^{j\Omega} + 0{,}81} = \frac{e^{j\Omega}+1}{\left(e^{j\Omega} - 0{,}9\,e^{jp/3}\right)\left(e^{j\Omega} - 0{,}9\,e^{-jp/3}\right)}$$

Για να υπολογίσουμε την εξίσωση διαφορών έχουμε

$$H(z) = \frac{z+1}{z^2 - 0{,}9\,z + 0{,}81}\cdot\frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{z^{-1}+z^{-2}}{1 - 0{,}9\,z^{-1} + 0{,}81z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z) - 0{,}9\,z^{-1}Y(z) + 0{,}81\,z^{-2}Y(z) = z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z)$$

$$y(n) - 0{,}9\,y(n-1) - 0{,}8\,y(n-2) = x(n-1) + x(n-2)$$

```
b=[0,1,1];
a=[1,-0.9,0.81];
[R,p,C]=residuez(b,a)
R =
  -0.6173 - 0.9979i
  -0.6173 + 0.9979i
p =
   0.4500 + 0.7794i
   0.4500 - 0.7794i
C =
    1.2346

Mp=abs(p')
Mp =
    0.9000    0.9000

Ap=angle(p')/pi
Ap =
   -0.3333    0.3333
```

$$H(z) = 1{,}2346 + \frac{-0{,}6173 + j\,0{,}9976}{1 - |0{,}9|\,e^{-jp/3}\,z^{-1}} + \frac{-0{,}6173 - j\,0{,}9976}{1 - |0{,}9|\,e^{+jp/3}\,z^{-1}}, \quad |z| > 0{,}9$$

$$\begin{aligned} h(n) &= 1{,}2346\,d\,(n) + [(-0.6173 + j0.9979)\,|0{,}9|^{n}\,e^{-jp\,n/3} \\ &\quad + [(-0.6173 - j0.9979)\,|0{,}9|^{n}\,e^{+jp\,n/3}]\,u(n) \\ &= 1{,}2346\,d\,(n) + |0{,}9|^{n}\,[-1{,}2346\cos(p\,n/3) + 1{,}9958\sin(p\,n/3)]\,u(n) \end{aligned}$$

Παράδειγμα (επίλυση ΓΧΑ με αρχικές συνθήκες με μονόπλευρο Μz)

Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος

$$2\,y(n) - 3\,y(n-1) + y(n-2) = 2\,x(n), \quad n \geq 0$$

όταν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

και το σύστημα έχει αρχικές συνθήκες y(-1) = 4 και y(-2) = 10.

Λύση

Λαμβάνοντας μονόπλευρο μετασχηματισμό z στα δύο μέλη της εξίσωσης διαφορών έχουμε τελικά

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} + \frac{1-2\,z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{2-\frac{9}{4}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

και με αντίστροφο μετασχηματισμό z προσδιορίζουμε την έξοδο του συστήματος

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{2}{3}u(n) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

Η πλήρης απόκριση του συστήματος μπορεί να εκφραστεί με της παρακάτω μορφές

$$y(n) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{2}{3}u(n)}_{\text{homogeneous part}} + \underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)}_{\text{particular part}}$$

$$y(n) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)}_{\text{transient response}} + \underbrace{\frac{2}{3}u(n)}_{\text{steady-state response}}$$

Η εξίσωση που δίνει την έξοδο του συστήματος μπορεί να γραφεί ως

$$\mathrm{Y}(z)=\frac{\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}+\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$Y(z)=Y_{ZS}+Y_{ZI}=H(z)\,X(z)+H(z)\,X_{IC}(z)$$

όπου Y_{ZS} είναι απόκριση μόνιμης κατάστασης (steady-state response) και $X_{IC}(z)=[\underset{\uparrow}{1},-2]$ είναι η ισοδύναμη αρχική συνθήκη εισόδου (initial-condition input) Έτσι η πλήρης έξοδος του συστήματος γράφεται ως

$$y(n)=\underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u(n)-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)+\frac{8}{3}u(t)}_{zero-state\ response}+\underbrace{3\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)-2u(n)}_{zero-inpute\ response}$$

```
Y=[4,10];
>> X=[0,0];
>> xic=filtic(b,a,Y,X)
xic =
     1    -2

a=[2,-3,1];
b=[2];
n=[0:7];
x=(1/4).^n;
y1=filter(b,a,x,xic)
y1 =
  Columns 1 through 6
    2.0000    1.2500    0.9375    0.7969    0.7305    0.6982
  Columns 7 through 8
    0.6824    0.6745
```