Chapter 3

Σημασιολογία Αναδρομικών Προγραμμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τη σημασιολογία γλωσσών προγραμματισμού που κύριο χαρακτηριστικό τους είναι η χρήση αναδρομικών εξισώσεων (που συχνά αναφέρονται σαν *αναδρομικές συναρτήσεις*). Για παράδειγμα, θεωρήστε το ακόλουθο πρόγραμμα P, το οποίο είναι ορισμένο στο σύνολο των ακεραίων αριθμών:

$$\mathtt{F(x)} \;\doteq\; \mathtt{if\ (x\ eq\ 0)\ or\ (x\ eq\ 1)\ then\ 1\ else\ F(x-1)+F(x-2)}$$

Μια συνηθισμένη πρακτική είναι να βλέπουμε προγράμματα όπως το παραπάνω σαν *κανόνες* που ακολουθώντας τους μπορούμε να υπολογίσουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. Ετσι, μπορούμε για παράδειγμα να υπολογίσουμε την τιμή του $\mathtt{F(2)}$, ως εξής:

$$\begin{array}{lll}
\mathtt{F(2)} & \rightarrow & \mathtt{if\ (2\ eq\ 0)\ or\ (2\ eq\ 1)\ then\ 1\ else\ F(2-1)+F(2-2)} \\
 & \rightarrow & \mathtt{F(2-1)+F(2-2)} \\
 & \rightarrow & \mathtt{(if\ (2-1\ eq\ 0)\ or\ (2-1\ eq\ 1)\ then\ 1\ else\ F((2-1)-1)+F((2-1)-2))\ +} \\
 & & \mathtt{(if\ (2-2\ eq\ 0)\ or\ (2-2\ eq\ 1)\ then\ 1\ else\ F((2-2)-1)+F((2-2)-2))} \\
 & \rightarrow & \mathtt{(if\ (1\ eq\ 0)\ or\ (1\ eq\ 1)\ then\ 1\ else\ F((2-1)-1)+F((2-1)-2))\ +} \\
 & & \mathtt{(if\ (0\ eq\ 0)\ or\ (0\ eq\ 1)\ then\ 1\ else\ F((2-2)-1)+F((2-2)-2))} \\
 & \rightarrow & \mathtt{1+1} \\
 & \rightarrow & \mathtt{0}
\end{array}$$

όπου το σύμβολο $\rightarrow$ συμβολίζει τη μετατροπή μιας έκφρασης σε μια άλλη με τη χρήση ενός συντακτικού κανόνα.

Η παραπάνω τεχνική βασίζεται κατά κύριο λόγο στη συντακτική δομή της γλώσσας. Αποτελεί ουσιαστικά ένα είδος μηχανιστικής σημασιολογίας (operational semantics) για τη γλώσσα των αναδρομικών προγραμμάτων που θεωρούμε. Γενικά, μια τέτοια προσέγγιση δεν είναι απόλυτα ικανοποιητική διότι δεν μας δίνει καμμία πληροφορία σχετικά με το μαθηματικό νόημα ενός προγράμματος.

Μια άλλη προσέγγιση που μπορεί κανείς να ακολουθήσει είναι να αντιμετωπίσει το πρόγραμμα σαν μια εξίσωση με άγνωστο το F η οποία πρέπει να επιλυθεί. Η εξίσωση αυτή μπορεί να έχει πολλές λύσεις και στην περίπτωση αυτή θα χρειαστούμε κάποιο τρόπο επιλογής της πιό "κατάλληλης" από αυτές. Η "ξεχωριστή" αυτή λύση θα είναι και το μαθηματικό νόημα του αναδρομικού προγράμματος.

Παράδειγμα 3.1 Αν δούμε το παραπάνω πρόγραμμα ως μια εξίσωση με άγνωστο το F, περιμένουμε οτι η λύση της εξίσωσης αυτής θα είναι κάποια μαθηματική συνάρτηση. Το πρόγραμμα όμως αυτό έχει άπειρες τέτοιες λύσεις. Μια συνάρτηση που ικανοποιεί το πρόγραμμα είναι για παράδειγμα η:

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & if\ (x < 0) \\ 1, & if\ (x\ eq\ 0)\ or\ (x\ eq\ 1) \\ f_0(x-1) + f_0(x-2), & if\ (x > 1) \end{cases}$$

Μια άλλη συνάρτηση που ικανοποιεί το πρόγραμμα είναι η ακόλουθη:

$$f_1(x) = \begin{cases} 5, & if\ (x\ eq\ -1) \\ f_1(x+2) - f_1(x+1) & if\ (x < -1) \\ 1, & if\ (x\ eq\ 0)\ or\ (x\ eq\ 1) \\ f_1(x-1) + f_1(x-2), & if\ (x > 1) \end{cases}$$

Επίσης, το πρόγραμμα ικανοποιείται και από την ακόλουθη (μερική) συνάρτηση:

$$f_P(x) = \begin{cases} \text{μη ορισμένη}, & if\ (x < 0) \\ 1, & if\ (x\ eq\ 0)\ or\ (x\ eq\ 1) \\ f_P(x-1) + f_P(x-2), & if\ (x > 1) \end{cases}$$

Ολες οι παραπάνω συναρτήσεις έχουν την ιδιότητα ότι ικανοποιούν το παραπάνω αναδρομικό πρόγραμμα, για κάθε μια από αυτές δηλαδή ισχύει:

$$f_i(x) = if\ (x\ eq\ 0)\ or\ (x\ eq\ 1)\ then\ 1\ else\ f_i(x-1) + f_i(x-2)$$

■

Θα λέμε ότι οι συναρτήσεις (όπως αυτές του παραπάνω παραδείγματος) που ικανοποιούν ένα πρόγραμμα P είναι *σταθερά σημεία (fixpoints)* του αναδρομικού προγράμματος P. Από τις συναρτήσεις του παραπάνω παραδείγματος, η f_P μπορεί να δειχτεί οτι έχει μια σημαντική ιδιότητα: για κάθε ακέραιο x για τον οποίο η f_P είναι ορισμένη, όλες οι άλλες συναρτήσεις που είναι σταθερά σημεία του προγράμματος είναι επίσης ορισμένες. Επιπλέον μπορεί να δειχτεί ότι η f_P είναι η μοναδική συνάρτηση που έχει αυτή την ιδιότητα, και γι'αυτό ονομάζεται *ελάχιστο σταθερό σημείο (least fixpoint)* του προγράμματος.

Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι η συνάρτηση f_P είναι και η πιό διαισθητικά αποδεκτή από υπολογιστική άποψη. Οταν το αναδρομικό πρόγραμμα P που αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου εκτελεστεί σε ένα υπολογιστικό σύστημα, περιμένουμε την εκτέλεση του να μην τερματιστεί για τις τιμές του x που είναι μικρότερες του 0. Για τις τιμές αυτές βλέπουμε πως και η f_P είναι μη ορισμένη.

Με λίγα λόγια, συμπεραίνουμε ότι η ανάπτυξη της σημασιολογίας ενός αναδρομικού προγράμματος ανάγεται στον υπολογισμό του ελάχιστου σταθερού σημείου του προγράμματος. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο το σταθερό αυτό σημείο ενός προγράμματος μπορεί να υπολογιστεί.

3.1 Συναρτήσεις και Συναρτησιοειδή

Για τους σκοπούς του κεφαλαίου αυτού θα χρησιμοποιήσουμε συναρτήσεις οι οποίες είναι μερικές (partial). Ο λόγος που θεωρούμε τέτοιες συναρτήσεις είναι επειδή θέλουμε να δώσουμε νόημα σε προγράμματα τα οποία για κάποιες τιμές των παραμέτρων τους μπορεί να μην τερματίζουν. Αν το νόημα ενός προγράμματος αναπαρασταθεί με μια συνάρτηση, τότε για τις τιμές εισόδου για τις οποίες το πρόγραμμα δεν τερματίζει, η αντίστοιχη συνάρτηση δεν θα είναι ορισμένη.

Οι συναρτήσεις που θεωρούμε έχουν σαν πεδίο ορισμού το σύνολο $D_1^n = D_1 \times \cdots \times D_1$ και πεδίο τιμών το σύνολο D_2. Για κάθε n-άδα $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in D_1^n$, το $f(a_1, \ldots, a_n)$ είτε είναι ίσο με κάποιο στοιχείο $b \in D_2$ είτε είναι μη-ορισμένο. Για παράδειγμα, η συνάρτηση της διαίρεσης $div(x, y) = x/y$ η οποία αντιστοιχίζει το $R \times R$ (ζεύγη πραγματικών αριθμών) στο R (πραγματικούς αριθμούς), δεν είναι ορισμένη για $y = 0$.

Καθώς ο χειρισμός των ολικών συναρτήσεων είναι γενικά πιό βολικός από των μερικών, μπορούμε να μετατρέψουμε τις μερικές συναρτήσεις σε ολικές εισάγοντας ένα νέο στοιχείο $\perp$ το οποίο συμβολίζει την έννοια του μη-ορισμένου. Ετσι, επεκτείνουμε το D_2 στο $D_2^+ = D_2 \cup \{\perp\}$ (υποθέτοντας βέβαια ότι $\perp \notin D_2$). Κάθε μερική συνάρτηση $f : D_1^n \to D_2$ μπορεί έτσι να θεωρηθεί σαν μια ολική συνάρτηση από το D_1^n στο D_2^+: εάν η f είναι μη-ορισμένη για $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in D_1^n$, ορίζουμε το $f(a_1, \ldots, a_n)$ να είναι ίσο με $\perp$. Για παράδειγμα, θεωρούμε οτι η συνάρτηση div αντιστοιχίζει το $R \times R$ στο R^+, θέτοντας $div(x, 0) = \perp$, για κάθε $x \in R$.

Υπάρχει όμως μια ακόμη δυσκολία: θέλουμε συχνά να χρησιμοποιούμε σύνθεση συναρτήσεων, και επομένως συχνά θα χρειαστεί να υπολογίσουμε την τιμή μιας συνάρτησης που παίρνει σαν παράμετρο την τιμή $\perp$. Για παράδειγμα, πως θα υπολογίσουμε την τιμή του $div(y, div(x, 0))$; Πρέπει προφανώς να γνωρίζουμε την τιμή του $div(x, \perp)$. Κατά συνέπεια, πρέπει γενικά να επεκτείνουμε τις μερικές συναρτήσεις ώστε να γίνουν ολικές συναρτήσεις από το $(D_1^+)^n$ στο D_2^+, όπου $D_1^+ = D_1 \cup \{\perp\}$.

Παραμένει βέβαια το πρόβλημα του πως θα ορίσουμε το $div(x, \perp)$. Θα το ορίσουμε να είναι ίσο με $\perp$ ή ίσο με κάποιο αριθμό της προτίμησης μας; Η πρώτη επιλογή φαίνεται καλύτερη γιατί συμφωνεί με τη διαίσθηση μας από υπολογιστική άποψη. Θέλουμε όμως ένα γενικό τρόπο ορισμού ο οποίος να καλύπτει όλες τις συναρτήσεις που μπορεί κανείς να σκεφτεί να χρησιμοποιήσει. Οπως θα δούμε στις επόμενες παραγράφους, υπάρχει ένας γενικός (και διαισθητικά αποδεκτός) τρόπος να ορίσουμε την τιμή μιας συνάρτησης στην περίπτωση που αυτή παίρνει σαν όρισμα το $\perp$. Ο τρόπος αυτός είναι να επεκτείνουμε τη συνάρτηση με *μονοτονικό* τρόπο, και θα τον εξετάσουμε στην επόμενη παράγραφο. Θα συμβολίζουμε το σύνολο των μονοτονικών συναρτήσεων από το $(D_1^+)^n$ στο D_2^+ με $[(D_1^+)^n \to D_2^+]$.

Στις επόμενες παραγράφους θα συζητήσουμε επίσης την έννοια των συναρτησιοειδών, που είναι συναρτήσεις που αντιστιχοίζουν το σύνολο $[(D_1^+)^n \to D_2^+]$ στο $[(D_1^+)^n \to D_2^+]$. Με λίγα λόγια, ένα συναρτησιοειδές τ αντιστοιχίζει συναρτήσεις του $[(D_1^+)^n \to D_2^+]$ σε συναρτήσεις του $[(D_1^+)^n \to D_2^+]$. Θα συζητήσουμε επίσης της έννοια των *μονοτονικών* και *συνεχών* συναρτησιοειδών και θα εισάγουμε τις έννοιες του *σταθερού σημείου* και *ελάχιστου σταθερού σημείου* ενός συναρτησιοειδούς. Το κεφάλαιο θα κλείσει με την παρουσίαση του θεωρήματος του Kleene το οποίο λέει ότι κάθε συνεχές συναρτησιοειδές έχει ένα και μοναδικό σταθερό σημείο. Αυτό το θεώρημα είναι και το βασικό που χρειαζόμαστε καθώς θα μας επιτρέψει να δώσουμε νόημα στα αναδρομικά προγράμματα που μας ενδιαφέρουν.

3.2 Μονοτονικές Συναρτήσεις

Για να ορίσουμε την έννοια της *μονοτονικότητας*, πρέπει πρώτα να ορίσουμε μια σχέση μερικής διάταξης[1], την οποία τη συμβολίζουμε με $\sqsubseteq$, σε κάθε πεδίο $D^+ = D \cup \{\perp\}$. Η σχέση $\sqsubseteq$ θα διαβάζεται "είναι λιγότερο ορισμένο ή ίσο", και την ορίζουμε ως εξής:

$$\perp \sqsubseteq d \quad \text{και} \quad d \sqsubseteq d \quad \text{για κάθε } d \in D^+$$

Με λίγα λόγια το $\perp$ είναι λιγότερα ορισμένο από κάθε άλλη τιμή του πεδίου D^+ και κάθε τιμή d είναι λιγότερα ορισμένη ή ίση με τον εαυτό της. Πρέπει να σημειώσουμε ότι διαφορετικά στοιχεία του D δεν σχετίζονται μεταξύ τους με βάση την $\sqsubseteq$, δηλαδή για $a, b \in D$, με a διαφορετικό του b, δεν ισχύει ούτε $a \sqsubseteq b$ ούτε $b \sqsubseteq a$. Η φυσική σημασία του γεγονότος αυτού είναι ότι τα διαφορετικά στοιχεία του D είναι πλήρως ορισμένες και διαφορετικές μεταξύ τους οντότητες και επομένως δεν πρέπει να συσχετιστούν με βάση τη σχέση $\sqsubseteq$.

[1] Υπενθυμίζουμε ότι μια σχέση $\sqsubseteq$ πάνω σε ένα σύνολο A είναι σχέση μερικής διάταξης αν είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική δηλαδή:

$$\begin{array}{ll}
\forall a \in A \ (a \sqsubseteq a) & \text{(Ανακλαστική)} \\
\forall a_1, a_2 \in A \ \text{εάν} \ (a_1 \sqsubseteq a_2) \ \text{και} \ (a_2 \sqsubseteq a_1) \ \text{τότε} \ (a_1 = a_2) & \text{(Αντισυμμετρική)} \\
\forall a_1, a_2, a_3 \in A \ \text{εάν} \ (a_1 \sqsubseteq a_2) \ \text{και} \ (a_2 \sqsubseteq a_3) \ \text{τότε} \ (a_1 \sqsubseteq a_3) & \text{(Μεταβατική)}
\end{array}$$

Συχνά θα γράφουμε $a \sqsubset b$ αν $a \sqsubseteq b$ και το a είναι διαφορετικό από το b. Επίσης θα γράφουμε $a \not\sqsubseteq b$ αν δεν ισχύει το $a \sqsubseteq b$.

Το ότι η παραπάνω σχέση $\sqsubseteq$ που ορίσαμε είναι σχέση μερικής διάταξης, μπορεί εύκολα να αποδειχτεί.

Μπορούμε να επεκτείνουμε την $\sqsubseteq$ ώστε να εφαρμόζεται και σε n-άδες στοιχείων:

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \sqsubseteq \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \text{ εάν και μόνο εάν } a_i \sqsubseteq b_i \text{ για κάθε } i, 1 \leq i \leq n$$

Παράδειγμα 3.2 Εαν $D = \{a, b\}$, τότε $D^+ = \{a, b, \perp\}$, και η σχέση μερικής διάταξης στο D^+ είναι:

$$\begin{gathered} \perp \sqsubseteq \perp \\ \perp \sqsubseteq a \\ \perp \sqsubseteq b \\ a \sqsubseteq a \\ b \sqsubseteq b \end{gathered}$$

■

Παράδειγμα 3.3 Αν $D = \{a, b\}$ τότε $D \times D = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$ και το $D^+ \times D^+ = \{\langle \perp, \perp \rangle, \langle \perp, a \rangle, \langle a, \perp \rangle, \ldots, \langle a, b \rangle \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$. Η σχέση μερικής διάταξης στο $D^+ \times D^+$ είναι:

$$\begin{array}{lcl} \langle \perp, \perp \rangle & \sqsubseteq & \langle \perp, \perp \rangle, \langle \perp, a \rangle, \langle a, \perp \rangle, \ldots, \langle a, b \rangle \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle \\ \langle a, \perp \rangle & \sqsubseteq & \langle a, \perp \rangle, \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle \\ \langle \perp, a \rangle & \sqsubseteq & \langle \perp, a \rangle, \langle a, a \rangle, \langle b, a \rangle \\ \langle \perp, b \rangle & \sqsubseteq & \langle \perp, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, b \rangle \\ \langle b, \perp \rangle & \sqsubseteq & \langle b, \perp \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle \\ \langle a, a \rangle & \sqsubseteq & \langle a, a \rangle \\ \langle b, b \rangle & \sqsubseteq & \langle b, b \rangle \\ \langle a, b \rangle & \sqsubseteq & \langle a, b \rangle \\ \langle b, a \rangle & \sqsubseteq & \langle b, a \rangle \end{array}$$

■

Πολύ συχνά στις επόμενες παραγράφους θα συμβολίζουμε μια n-άδα $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ ως $\overline{x}$. Είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε την έννοια της μονοτονικότητας:

Ορισμός 3.1 *Μια συνάρτηση f από το $(D_1^+)^n$ στο D_2^+ είναι μονοτονική εαν $f(\overline{x}) \sqsubseteq f(\overline{y})$ για όλα τα $\overline{x}, \overline{y} \in (D_1^+)^n$ για τα οποία ισχύει $\overline{x} \sqsubseteq \overline{y}$.*

Διαισθητικά, η μονοτονικότητα εξασφαλίζει ότι όταν η "είσοδος" $\overline{x}$ της συνάρτησης f είναι λιγότερο ορισμένη ή ίση από την "είσοδο" $\overline{y}$, τότε και η "έξοδος" $f(\overline{x})$ θα είναι λιγότερο ορισμένη ή ίση από την "έξοδο" $f(\overline{y})$.

Παράδειγμα 3.4 Παραδείγματα μονοτονικών συναρτήσεων είναι:

- Η ταυτοτική συνάρτηση I με $I(x) = x$, για κάθε $x \in D_1^+$.
- Η παντού μη-ορισμένη συνάρτηση Ω με $\Omega(\overline{x}) = \perp$, για κάθε $\overline{x} \in (D_1^+)^n$.
- Η σταθερή συνάρτηση C η οποία αντιστοιχίζει κάθε $\overline{x} \in (D_1^+)^n$ σε μια σταθερή τιμή $c \in D_2^+$.

■

3.2.1 Ιδιότητες Μονοτονικών Συναρτήσεων

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε διάφορες ιδιότητες των μονοτονικών συναρτήσεων οι οποίες θα μας επιτρέπουν να αποφασίζουμε αν μια δεδομένη συνάρτηση είναι ή όχι μονοτονική. Οι αποδείξεις των παρακάτω θεωρημάτων είναι εύκολες και παραλείπονται.

Θεώρημα 3.1 *Εστω f μια συνάρτηση από το D_1^+ στο D_2^+ (δηλαδή η f έχει μία μόνο παράμετρο). Τότε η f είναι μονοτονική εάν και μόνο εάν είτε $f(\perp) = \perp$ είτε $f(x) = c$ για όλα τα $x \in D_1^+$.*

Θεώρημα 3.2 *Για κάθε $n \geq 2$, αν η συνάρτηση $f : (D_1^+)^n \rightarrow D_2^+$ είναι μονοτονική, τότε είτε $f(\perp, \ldots, \perp) = \perp$ είτε $f(x_1, \ldots, x_n) = c$, για όλα τα $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in (D_1^+)^n$.*

Ενω κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τη δεύτερη συνθήκη του παραπάνω θεωρήματος είναι σταθερή και συνεπώς μονοτονική, υπάρχουν συναρτήσεις που ικανοποιούν την πρώτη συνθήκη και δεν είναι μονοτονικές. Για παράδειγμα, η συνάρτηση div την οποία επεκτείνουμε ως εξής: $div(x, \perp) = 0$ για κάθε $x \in R$, και $div(\perp, y) = \perp$ για κάθε $y \in R^+$, δεν είναι μονοτονική διότι ενώ $\langle 1, \perp \rangle \sqsubseteq \langle 1, 1 \rangle$, $div(1, \perp) = 0$ και $div(1, 1) = 1$ και συνεπώς $div(1, \perp) \not\sqsubseteq div(1, 1)$.

Ορισμός 3.2 *Μια συνάρτηση f από το $(D_1^+)^n$ στο D_2^+ ονομάζεται φυσικά επεκτεταμένη αν έχει την ακόλουθη ιδιότητα: $f(a_1, \ldots, a_n) = \perp$ όταν ένα τουλάχιστον από τα a_i είναι $\perp$.*

Η σημασία της φυσικής επέκτασης φαίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.3 *Κάθε φυσικά επεκτεταμένη συνάρτηση είναι μονοτονική.*

Απόδειξη: Με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι η f από το $(D_1^+)^n$ στο D_2^+ είναι φυσικά επεκτεταμένη αλλά όχι μονοτονική. Αφού η f δεν είναι μονοτονική, υπάρχουν n-άδες $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ και $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ με $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \sqsubseteq \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ και $f(a_1, \ldots, a_n) \not\sqsubseteq f(b_1, \ldots, b_n)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$, τότε $f(a_1, \ldots, a_n) = f(b_1, \ldots, b_n)$ και κατά συνέπεια ισχύει $f(a_1, \ldots, a_n) \sqsubseteq f(b_1, \ldots, b_n)$ (άτοπο).

- Αν $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \sqsubset \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$, τότε υπάρχει κάποιο i_0 τέτοιο ώστε $a_{i_0} \sqsubset b_{i_0}$. Από τον ορισμό της $\sqsubseteq$ προκύπτει οτι $a_{i_0} =\perp$. Αφού η f είναι φυσικά επεκτεταμένη, $f(a_1, \ldots, a_n) =\perp$ και επομένως $f(a_1, \ldots, a_n) \sqsubseteq f(b_1, \ldots, b_n)$ (άτοπο).

Συνεπώς κάθε φυσικά επεκτεταμένη συνάρτηση είναι μονοτονική. ■

Παράδειγμα 3.5 Η μερική συνάρτηση div μπορεί να επεκταθεί σε ολική συνάρτηση θέτοντας $div(x, 0) =\perp$. Μπορούμε επιπλέον να την κάνουμε μονοτονική χρησιμοποιώντας την φυσική της επέκταση: $div(x, \perp) =\perp$ και $div(\perp, y) =\perp$, για κάθε $x, y \in R^+$. ■

Παράδειγμα 3.6 Η *συνάρτηση ισότητας* που αντιστοιχίζει το $D \times D$ στο $\{true, false\}$ μπορεί να επεκταθεί και να δώσει τη λεγόμενη *ασθενή ισότητα* (που συμβολίζεται με το eq) και είναι ορισμένη από το $D^+ \times D^+$ στο $\{true, false\}^+$. Η ασθενής ισότητα δίνει $\perp$ όταν ένα τουλάχιστον από τα ορίσματά της είναι $\perp$. Αυτή είναι επομένως μια φυσική επέκταση και κατά συνέπεια η ασθενής ισότητα είναι μονοτονική. ■

Παράδειγμα 3.7 Η συνάρτηση $if-then-else$ από το $\{true, false\} \times D \times D$ στο D, ορίζεται για όλα τα $a, b \in D$ ως εξής:

$$(if\ true\ then\ a\ else\ b) \ = \ a$$

και

$$(if\ false\ then\ a\ else\ b) \ = \ b$$

Η συνάρτηση αυτή μπορεί να επεκταθεί ώστε να γίνει μονοτονική απο το $\{true, false\}^+ \times D^+ \times D^+$ στο D^+ θέτοντας για κάθε $a, b \in D^+$:

$$\begin{aligned}
(if\ true\ then\ a\ else\ \perp) &= a \\
(if\ false\ then\ \perp\ else\ b) &= b \\
(if\ \perp\ then\ a\ else\ b) &= \perp
\end{aligned}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι μονοτονική παρόλο που δεν είναι μια φυσική επέκταση του $if - then - else$. ■

Από το σημείο αυτό και στο εξής θα υποθέτουμε ότι όλες οι βασικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε στα παραδείγματα (εκτός από τις σταθερές και το $if - then - else$) είναι φυσικά επεκτεταμένες.

3.2.2 Σύνθεση Μονοτονικών Συναρτήσεων

Μια σημαντική ιδιότητα των συναρτήσεων είναι η *σύνθεση* η οποία μας επιτρέπει να ορίζουμε νέες συναρτήσεις χρησιμοποιώντας άλλες πιό απλές. Αν f είναι μια συνάρτηση από το $(D_1^+)^n$ στο D_2^+ και g είναι μια συνάρτηση από το D_2^+ στο D_3^+, τότε η σύνθεση της f και g είναι η συνάρτηση από το $(D_1^+)^n$ στο D_3^+ με τιμή $g(f(\overline{x}))$ για κάθε $\overline{x} \in (D_1^+)^n$ (η σύνθεση μπορεί κατάλληλα να οριστεί και στην περίπτωση που η g έχει περισσότερα από ένα ορίσματα).

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι μονοτονικές, το ίδιο ισχύει και για τη σύνθεση τους. Η απόδειξη είναι άμεση: αν οι f, g είναι μονοτονικές, έχουμε ότι αν $\overline{a} \sqsubseteq \overline{b}$ τότε $f(\overline{a}) \sqsubseteq f(\overline{b})$ το οποίο συνεπάγεται ότι $g(f(\overline{a})) \sqsubseteq g(f(\overline{b}))$. Επομένως η σύνθεση δύο μονοτονικών συναρτήσεων είναι και αυτή μονοτονική.

Παράδειγμα 3.8 Η συνάρτηση f από το N^+ στο N^+ η οποία ορίζεται ως:

$$f(x) \;=\; if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 1\ else\ x$$

είναι σύνθεση της συνάρτησης $if-then-else$ και της συνάρτησης ασθενούς ισότητας eq. Αφού οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι μονοτονικές, τότε και η f είναι μονοτονική. ■

Παράδειγμα 3.9 Η συνάρτηση f από το N^+ στο N^+ η οποία ορίζεται ως:

$$f(x) \;=\; if\ (x\ eq\ \perp)\ then\ 0\ else\ 1$$

ορίζεται ως σύνθεση μονοτονικών συναρτήσεων και είναι επομένως μονοτονική. ■

3.2.3 Ελάχιστα Ανω Φράγματα

Πριν εισάγουμε την έννοια των συναρτησιοειδών πρέπει να ορίσουμε μερικές ακόμη έννοιες οι οποίες σχετίζονται με τις μονοτονικές συναρτήσεις. Υπενθυμίζουμε οτι $[(D_1^+)^n \to D_2^+]$ είναι το σύνολο όλων των μονοτονικών συναρτήσεων από το $(D_1^+)^n$ στο D_2^+.

Ορισμός 3.3 *Εστω $f, g \in [(D_1^+)^n \to D_2^+]$. Θα γράφουμε $f \sqsubseteq g$ (το οποίο διαβάζεται "η f είναι λιγότερο ορισμένη ή ίση με την g") αν $f(\overline{x}) \sqsubseteq g(\overline{x})$ για όλα τα $\overline{x} \in (D_1^+)^n$.*

Μπορεί εύκολα να δειχτεί ότι η σχέση $\sqsubseteq$ είναι μια σχέση μερικής διάταξης στο $[(D_1^+)^n \to D_2^+]$.

Ορισμός 3.4 *Εστω $f, g \in [(D_1^+)^n \to D_2^+]$. Θα γράφουμε $f = g$ (το οποίο διαβάζεται "η f είναι ίση με την g") αν $f(\overline{x}) = g(\overline{x})$ για κάθε $\overline{x} \in (D_1^+)^n$. Με άλλα λόγια, $f = g$ αν και μόνο αν $f \sqsubseteq g$ και $g \sqsubseteq f$.*

Ορισμός 3.5 *Εστω $f_0, f_1, f_2, \ldots$ μια ακολουθία συναρτήσεων στο $[(D_1^+)^n \to D_2^+]$ (την οποία θα συμβολίζουμε για συντομία με $\{f_i\}$). Η $\{f_i\}$ ονομάζεται "αλυσσίδα" αν $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq \cdots$.*

Ορισμός 3.6 *Εστω $\{f_i\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων στο $[(D_1^+)^n \to D_2^+]$ και έστω $f \in [(D_1^+)^n \to D_2^+]$. Θα λέμε ότι η f είναι ένα άνω φράγμα της $\{f_i\}$ αν $f_i \sqsubseteq f$ για κάθε $i \geq 0$. Αν επιπλέον $f \sqsubseteq g$ για κάθε άνω φράγμα g της $\{f_i\}$, τότε η f ονομάζεται* ελάχιστο άνω φράγμα της $\{f_i\}$, *και συμβολίζεται με $lub(\{f_i\})$ (least upper bound).*

Αξίζει να σημειώσουμε οτι το ελάχιστο άνω φράγμα f μιας ακολουθίας $\{f_i\}$ αν υπάρχει είναι μοναδικό, γιατί αν υπήρχε και ένα δεύτερο ελάχιστο άνω φραγμα g της $\{f_i\}$ τότε $f \sqsubseteq g$ και $g \sqsubseteq f$ (και επομένως $f = g$). Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη το ακόλουθο θεώρημα το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στις επόμενες παραγράφους:

Θεώρημα 3.4 *Κάθε αλυσσίδα $\{f_i\}$ έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.*

3.2.4 Συνεχή Συναρτησιοειδή

Με βάση τα όσα έχουν αναπτυχθεί στις προηγούμενες παραγράφους, μπορούμε τώρα να ορίσουμε την έννοια του *συναρτησιοειδούς.* Ενα συναρτησιοειδές τ με πεδίο ορισμού το σύνολο $[(D_1^+)^n \to D_2^+]$, αντιστοιχίζει το σύνολο $[(D_1^+)^n \to D_2^+]$ των συναρτήσεων στον εαυτό του. Με άλλα λόγια, ένα συναρτησιοειδές τ παίρνει σαν όρισμα μια μονοτονική συνάρτηση $f : (D_1^+)^n \to D_2^+$ και επιστρέφει σαν αποτέλεσμα μια νέα μονοτονική συνάρτηση $\tau[f] \in [(D_1^+)^n \to D_2^+]$.

Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η έννοια του συναρτησιοειδούς που ορίσαμε παραπάνω είναι ουσιαστικά μια ειδική περίπτωση των λεγόμενων *συναρτήσεων υψηλής τάξης.* Οι συναρτήσεις υψηλής τάξης είναι συναρτήσεις που είτε παίρνουν σαν παραμέτρους άλλες συναρτήσεις είτε επιστρέφουν σαν αποτέλεσμα μια συνάρτηση (είτε και τα δύο). Τέτοιες συναρτήσεις είναι πολύ συνηθισμένες στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, το γνωστό σύμβολο Σ το οποίο χρησιμοποιείται για να αθροίσουμε τους όρους μιας ακολουθίας δεν είναι τίποτε άλλο από μια συνάρτηση υψηλής τάξης $Sigma$ που ορίζεται ως εξής:

$$Sigma(x, y, f) = f(x) + f(x+1) + \cdots + f(y)$$

(Η $Sigma$ είναι συνάρτηση υψηλής τάξης διότι η τρίτη της παράμετρος είναι μια συνάρτηση). Για παράδειγμα, όταν γράφουμε $\Sigma_{i=1}^{j=10} i^2 + 1$ ουσιαστικά εννοούμε $Sigma(1, 10, f)$ όπου η f είναι μια συνάρτηση που ορίζεται ως $f(i) = i^2 + 1$.

Για τους σκοπούς του μαθήματος αυτού θα περιοριστούμε στην έννοια του συναρτησιοειδούς που ορίσαμε παραπάνω. Δύο ενδιαφέρουσες ιδιότητες των συναρτησιοειδών είναι η *μονοτονικότητα* και η *συνέχεια*:

1. Ενα συναρτησιοειδές τ με πεδίο ορισμού το $[(D_1^+)^n \to D_2^+]$ ονομάζεται μονοτονικό αν $\tau[f] \sqsubseteq \tau[g]$ όταν $f \sqsubseteq g$ $(f, g \in [(D_1^+)^n \to D_2^+])$.

2. Ενα μονοτονικό συναρτησιοειδές τ με πεδίο ορισμού το $[(D_1^+)^n \to D_2^+]$ ονομάζεται συνεχές αν για κάθε αλυσσίδα συναρτήσεων $\{f_i\}$, έχουμε

$$\tau[lub\{f_i\}] = lub\{\tau[f_i]\}$$

Αφού η $\{f_i\}$ είναι μια αλυσσίδα (δηλαδή $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq \cdots$), και το τ είναι μονοτονικό, έχουμε $\tau[f_0] \sqsubseteq \tau[f_1] \sqsubseteq \tau[f_2] \sqsubseteq \cdots$). Επομένως, η $\{\tau[f_i]\}$ είναι επίσης μια αλυσσίδα, και σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4 τόσο το $lub\{f_i\}$ όσο και το $lub\{\tau[f_i]\}$ θα υπάρχουν.

Παράδειγμα 3.10 Το *ταυτοτικό* συναρτησιοειδές που ορίζεται

$$\tau[F] = F$$

και αντιστοιχίζει κάθε συνάρτηση $f : [(D_1^+)^n \to D_2^+]$ στον εαυτό της, είναι προφανώς μονοτονικό διότι όταν $f \sqsubseteq g$ τότε $\tau[f] = f \sqsubseteq g = \tau[g]$. Είναι επίσης συνεχές διότι $\tau[lub\{f_i\}] = lub\{f_i\} = lub\{\tau[f_i]\}$. ∎

Παράδειγμα 3.11 Το *σταθερό* συναρτησιοειδές που ορίζεται

$$\tau[F] = h$$

και αντιστοιχίζει κάθε συνάρτηση $f : [(D_1^+)^n \to D_2^+]$ στη συνάρτηση h, είναι προφανώς μονοτονικό διότι όταν $f \sqsubseteq g$ τότε $\tau[f] = h \sqsubseteq h = \tau[g]$. Είναι επίσης συνεχές διότι $\tau[lub\{f_i\}] = h = lub\{h\} = lub\{\tau[f_i]\}$. ∎

Συνήθως θα καθορίζουμε ένα συναρτησιοειδές τ ως σύνθεση γνωστών μονοτονικών συναρτήσεων και της μεταβλητής F. Οταν η F αντικαθίσταται από μια γνωστή μονοτονική συνάρτηση, καθορίζεται η συνάρτηση $\tau[f]$ η οποία είναι προφανώς πάντα μονοτονική. Επιπλέον, ισχύει το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα, το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη:

Θεώρημα 3.5 *Κάθε συναρτησιοειδές τ που ορίζεται ως σύνθεση μονοτονικών συναρτήσεων και της μεταβλητής F, είναι συνεχές.*

Παράδειγμα 3.12 Το συναρτησιοειδές τ με πεδίο ορισμού το $[N^+ \to N^+]$ που ορίζεται ως:

$$\tau[F](x) = if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 1\ else\ F(x+1)$$

κατασκευάζεται ως σύνθεση μονοτονικών συναρτήσεων ($if - then - else$, πρόσθεση, ασθενής ισότητα) και με τη χρήση της μεταβλητής F. Επομένως είναι συνεχές. ∎

Παράδειγμα 3.13 Το συναρτησιοειδές τ με πεδίο ορισμού το $[N^+ \to N^+]$ που ορίζεται ως:

$$\tau'[F](x) = if\ (F(x)\ eq\ \perp)\ then\ 0\ else\ \perp$$

είναι μονοτονικό και συνεχές καθώς έχει δημιουργηθεί από τη σύνθεση μονοτονικών συναρτήσεων και της μεταβλητής F. ∎

3.2.5 Σταθερά Σημεία Συναρτησιοειδών

Μπορούμε τώρα να εισάγουμε τις έννοιες του *σταθερού σημείου* και του *ελάχιστου σταθερού σημείου* ενός συναρτησιοειδούς. Εστω τ ένα συναρτησιοειδές με πεδίο ορισμού το $[(D_1^+)^n \to D_2^+]$. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f \in [(D_1^+)^n \to D_2^+]$ είναι ένα σταθερό σημείο του τ εάν $\tau[f] = f$, αν δηλαδή το τ αντιστοιχίζει τη συνάρτηση f στον εαυτό της. Εαν f είναι ένα σταθερό σημείο του τ και $f \sqsubseteq g$ για κάθε άλλο σταθερό σημείο g του τ, τότε η f ονομάζεται ελάχιστο σταθερό σημείο του τ.

Ενα συναρτησιοειδές μπορεί να έχει ένα πεπερασμένο αριθμό σταθερών σημείων, ένα άπειρο αριθμό σταθερών σημείων ή ακόμη και κανένα σταθερό σημείο. Ομως, ένα συναρτησιοειδές μπορεί να έχει το πολύ ένα ελάχιστο σταθερό σημείο διότι αν f_1 και f_2 είναι ελάχιστα σταθερά σημεία του τ τότε $f_1 \sqsubseteq f_2$ και $f_2 \sqsubseteq f_1$ και συνεπώς $f_1 = f_2$.

Εστω τ ένα συναρτησιοειδές με πεδίο ορισμού το $[(D_1^+)^n \to D_2^+]$. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\tau^0[\Omega], \tau^1[\Omega], \tau^2[\Omega], \ldots$, όπου $\tau^0[\Omega]$ συμβολίζει το Ω (την παντού μη-ορισμένη συνάρτηση), και $\tau^{i+1}[\Omega] = \tau[\tau^i[\Omega]]$ για κάθε $i \geq 0$. Αφού το τ είναι μονοτονικό, η ακολουθία $\{\tau^i[\Omega]\}$ είναι αλυσσίδα, δηλαδή:

$$\Omega \sqsubseteq \tau[\Omega] \sqsubseteq \tau^2[\Omega] \sqsubseteq \cdots$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4, το $lub\{\tau^i[\Omega]\}$ υπάρχει, και όπως θα δούμε σε λίγο αυτό είναι και το ελάχιστο σταθερό σημείο του τ.

Παράδειγμα 3.14 Εστω το συναρτησιοειδές τ με πεδίο ορισμού το $[N^+ \to N^+]$ που ορίζεται ως εξής:

$$\tau[F](x) \;=\; if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 1\ else\ x * F(x-1)$$

Μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει οτι για κάθε $i \geq 0$

$$\tau^i[\Omega](x) \;=\; if\ (x\ <\ i)\ then\ x!\ else\ \perp$$

Επομένως:

$$lub\{\tau^i[\Omega]\}(x) \;=\; x!$$

■

Φθάνουμε έτσι στο επόμενο Θεώρημα που είναι και το κυριώτερο του κεφαλαίου αυτού και θα χρησιμοποιηθεί για να δώσουμε σημασιολογία στα αναδρομικά προγράμματα:

Θεώρημα 3.6 *(Kleene) Κάθε συνεχές συναρτησιοειδές τ έχει ένα ελάχιστο σταθερό σημείο f_τ, όπου $f_\tau = lub\{\tau^i[\Omega]\}$.*

Απόδειξη: Αφού το τ είναι συνεχές, είναι και μονοτονικό και επομένως η ακολουθία $\{\tau^i[\Omega]\}$ είναι μια αλυσσίδα και έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα (lub) το οποίο συμβολίζουμε με f_τ. Θα δείξουμε ότι το f_τ είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο της τ σε δύο βήματα.

Βήμα 1. Δείχνουμε ότι το f_τ είναι ένα σταθερό σημείο του τ. Αφού το τ είναι συνεχές, έχουμε:

$$\tau[f_\tau] \;=\; \tau[lub\{\tau^i[\Omega]\}] \;=\; lub\{\tau^{i+1}[\Omega]\} \;=\; lub\{\tau^i[\Omega]\} \;=\; f_\tau$$

Επομένως, $\tau[f_\tau] = f_\tau$.

Βήμα 2. Απομένει να δείξουμε ότι το f_τ είναι το *ελάχιστο* σταθερό σημείο του τ, δηλαδή οτι $f_\tau \sqsubseteq g$ για κάθε σταθερό σημείο g του τ. Αρχικά δείχνουμε οτι $\tau^i[\Omega] \sqsubseteq g$, για όλα τα $i \geq 0$, χρησιμοποιώντας επαγωγή στο i. Προφανώς, για $i = 0$ το ζητούμενο ισχύει, διότι $\tau^0[\Omega] = \Omega \sqsubseteq g$. Υποθέτουμε οτι $\tau^{i-1}[\Omega] \sqsubseteq g$, και αφού το τ είναι μονοτονικό και η g είναι σταθερό σημείο του τ, έχουμε:

$$\tau^i[\Omega] \;=\; \tau[\tau^{i-1}[\Omega]] \;\sqsubseteq\; \tau[g] \;=\; g$$

Επομένως, $\tau^i[\Omega] \sqsubseteq g$, για κάθε $i \geq 0$. Κατά συνέπεια, η g είναι ένα άνω φράγμα της αλυσσίδας $\{\tau^i[\Omega]\}$. Αλλά, η f_τ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα της $\{\tau^i[\Omega]\}$, και επομένως $f_\tau \sqsubseteq g$. ■

Στα ακόλουθα παραδείγματα θα εξετάσουμε ποιά είναι τα ελάχιστα σταθερά σημεία κάποιων δεδομένων συναρτησιοειδών. Ολα τα συναρτησιοειδή που παραθέτουμε ορίζονται ως σύνθεση μονοτονικών συναρτήσεων και της μεταβλητής F, και είναι επομένως συνεχή.

Παράδειγμα 3.15 Το συναρτησιοειδές τ με πεδίο ορισμού το $[(D_1^+)^n \rightarrow D_2^+]$ το οποίο ορίζεται ως:

$$\tau[F](x) \;=\; F(x)$$

έχει κάθε συνάρτηση $f \in [(D_1^+)^n \rightarrow D_2^+]$ σαν σταθερό του σημείο. Το ελάχιστο σταθερό σημείο του τ είναι η συνάρτηση Ω η οποία είναι παντού μη-ορισμένη. ■

Παράδειγμα 3.16 Το συναρτησιοειδές τ με πεδίο ορισμού το $[N^+ \rightarrow N^+]$ το οποίο ορίζεται ως:

$$\tau[F](x) \;=\; if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 0\ else\ 2 + F(x-1)$$

είναι συνεχές και επομένως θα έχει ένα ελάχιστο σταθερό σημείο. Υπολογίζουμε το σημείο αυτό το οποίο ισούται με $lub\{\tau^i[\Omega]\}$.

Για $i = 0$ έχουμε $\tau^0[\Omega] = \Omega$, δηλαδή $\tau^0[\Omega](x) = \perp$ γιά κάθε x. Υπολογίζουμε τώρα το

$\tau^1[\Omega]$:

$$\begin{aligned}
\tau^1[\Omega](x) &= \tau[\Omega] \\
&= if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 0\ else\ 2 + \Omega(x-1) \\
&= if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 0\ else\ \perp \\
&= \begin{cases} 0, & if\ (x\ eq\ 0) \\ \perp, & \text{διαφορετικά} \end{cases}
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το $\tau^2[\Omega]$:

$$\begin{aligned}
\tau^2[\Omega](x) &= \tau[\tau[\Omega]] \\
&= if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 0\ else\ 2 + \tau[\Omega](x-1) \\
&= if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 0\ else \\
&\quad\ 2 + (if\ (x-1\ eq\ 0)\ then\ 0\ else\ \perp) \\
&= \begin{cases} 0, & if\ (x\ eq\ 0) \\ 2, & if\ (x\ eq\ 1) \\ \perp, & \text{διαφορετικά} \end{cases}
\end{aligned}$$

Παρομοίως, μπορούμε να υπολογίσουμε το $\tau^3[\Omega]$ το οποίο ισούται με:

$$\begin{aligned}
\tau^3[\Omega](x) &= \tau[\tau^2[\Omega]] \\
&= \begin{cases} 0, & if\ (x\ eq\ 0) \\ 2, & if\ (x\ eq\ 1) \\ 4, & if\ (x\ eq\ 2) \\ \perp, & \text{διαφορετικά} \end{cases}
\end{aligned}$$

Γενικώτερα, μπορεί να δειχτεί οτι:

$$\tau^i[\Omega](x) = \begin{cases} 2 * x, & if\ (x < i) \\ \perp, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Κατά συνέπεια, $lub\{\tau^i[\Omega]\}(x) = 2 * x$. ■

3.3 Αναδρομικά Προγράμματα

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στον κύριο σκοπό του κεφαλαίου αυτού που είναι η σημασιολογία των αναδρομικών προγραμμάτων. Στη γλώσσα στην οποία θέλουμε να δώσουμε σημασιολογία, ένα πρόγραμμα είναι ουσιαστικά μια αναδρομική εξίσωση της μορφής:

$$\mathtt{F}(\overline{x}) \;\doteq\; \tau[\mathtt{F}](\overline{x})$$

όπου τ είναι ένα συναρτησιοειδές με πεδίο ορισμού το $[(D_1^+)^n \rightarrow D_2^+]$ το οποίο έχει δημιουργηθεί με σύνθεση γνωστών μονοτονικών συναρτήσεων και της μεταβλητής $\mathtt{F}$.

Αυτό που μένει είναι να δώσουμε σημασιολογία στα παραπάνω προγράμματα. Ετσι λοιπόν, αν P είναι ένα αναδρομικό πρόγραμμα της μορφής

$$\mathtt{F}(\overline{x}) \;\doteq\; \tau[\mathtt{F}](\overline{x})$$

ορίζουμε οτι το νόημα του προγράμματος P είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο f_τ του τ το οποίο και συμβολίζουμε με f_P.

Παράδειγμα 3.17 Το αναδρομικό πρόγραμμα:

$$\mathtt{F(x)} \;\doteq\; \mathtt{if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 1\ else\ x} * \mathtt{F(x-1)}$$

έχει ως νόημα του τη συνάρτηση παραγοντικό (δηλαδή $f_P(x) = x!$), διότι αυτή είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο του συναρτησιοειδούς

$$\tau[F](x) \;=\; if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 1\ else\ x * F(x-1)$$

■

Παράδειγμα 3.18 Το αναδρομικό πρόγραμμα:

$$\mathtt{F(x)} \;\doteq\; \mathtt{if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 0\ else\ 2} + \mathtt{F(x-1)}$$

έχει ως νόημα του τη συνάρτηση $f_P(x) = 2 * x$, διότι (σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.16) αυτή είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο του συναρτησιοειδούς

$$\tau[F](x) \;=\; if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 0\ else\ 2 + F(x-1)$$

■

3.4 Συστήματα Αναδρομικών Ορισμών

Η γλώσσα προγραμματισμού που ορίσαμε είναι αρκετά περιορισμένη διότι επιτρέπει τη χρήση μιας μόνο συναρτησιακής μεταβλητής $\mathtt{F}$ και ένα μόνο αναδρομικό ορισμό σε κάθε πρόγραμμα. Γενικά, θα θέλαμε η γλώσσα να υποστηρίζει συστήματα αναδρομικών ορισμών της μορφής:

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{F}_1(\overline{x}) & \doteq & \tau_1[\mathtt{F}_1,\ldots,\mathtt{F}_m](\overline{x}) \\ \mathtt{F}_2(\overline{x}) & \doteq & \tau_2[\mathtt{F}_1,\ldots,\mathtt{F}_m](\overline{x}) \\ & \cdots & \\ \mathtt{F}_m(\overline{x}) & \doteq & \tau_m[\mathtt{F}_1,\ldots,\mathtt{F}_m](\overline{x}) \end{array}$$

όπου κάθε τ_i είναι ένα συναρτησιοειδές με πεδίο ορισμού το $[(D_1^+)^n \to D_2^+]^m$ και εκφράζεται ως η σύνθεση γνωστών μονοτονικών συναρτήσεων καθώς και των μεταβλητών $\mathtt{F}_1, \ldots, \mathtt{F}_m$.

Παράδειγμα 3.19 Το ακόλουθο είναι ένα πρόγραμμα της επεκτεταμμένης γλώσσας αναδρομικών ορισμών:

$$\begin{aligned}
\mathtt{F}_1(\mathtt{x}) &\doteq \mathtt{if}\ (\mathtt{x}\ \mathtt{eq}\ 0)\ \mathtt{then}\ 1\ \mathtt{else}\ \mathtt{F}_1(\mathtt{x}-1)+\mathtt{F}_2(\mathtt{x}-1)\\
\mathtt{F}_2(\mathtt{x}) &\doteq \mathtt{if}\ (\mathtt{x}\ \mathtt{eq}\ 0)\ \mathtt{then}\ 0\ \mathtt{else}\ \mathtt{F}_2(\mathtt{x}+1)
\end{aligned}$$

Το παραπάνω πρόγραμμα είναι της μορφής:

$$\begin{aligned}
\mathtt{F}_1(\mathtt{x}) &\doteq \tau_1[\mathtt{F}_1,\mathtt{F}_2](\mathtt{x})\\
\mathtt{F}_2(\mathtt{x}) &\doteq \tau_2[\mathtt{F}_1,\mathtt{F}_2](\mathtt{x})
\end{aligned}$$

όπου τα τ_1, τ_2 είναι αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}
\tau_1[\mathtt{F}_1,\mathtt{F}_2](\mathtt{x}) &\doteq \mathtt{if}\ (\mathtt{x}\ \mathtt{eq}\ 0)\ \mathtt{then}\ 1\ \mathtt{else}\ \mathtt{F}_1(\mathtt{x}-1)+\mathtt{F}_2(\mathtt{x}-1)\\
\tau_1[\mathtt{F}_1,\mathtt{F}_2](\mathtt{x}) &\doteq \mathtt{if}\ (\mathtt{x}\ \mathtt{eq}\ 0)\ \mathtt{then}\ 0\ \mathtt{else}\ \mathtt{F}_2(\mathtt{x}+1)
\end{aligned}$$

■

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη σημασιολογία προγραμμάτων όπως αυτό του παραπάνω παραδείγματος, χρησιμοποιώντας παρόμοιες τεχνικές με αυτές που έχουν αναπτυχθεί στις προηγούμενες παραγράφους. Ετσι, αν για παράδειγμα θεωρήσουμε ένα πρόγραμμα δύο εξισώσεων (όπως του Παραδείγματος 3.19), μπορούμε να υπολογίσουμε το νόημα των $\mathtt{F}_1$ και $\mathtt{F}_2$ υπολογίζοντας τα $lub\{\tau_1^i[\Omega,\Omega]\}$ και $lub\{\tau_2^i[\Omega,\Omega]\}$ αντίστοιχα. Τα $\tau_1^i[\Omega,\Omega]$ και $\tau_2^i[\Omega,\Omega]$ ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

$$\begin{aligned}
\tau_1^0[\Omega,\Omega] &= \Omega\\
\tau_1^{i+1}[\Omega,\Omega] &= \tau_1[\tau_1^i[\Omega,\Omega],\tau_2^i[\Omega,\Omega]]
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\tau_2^0[\Omega,\Omega] &= \Omega\\
\tau_2^{i+1}[\Omega,\Omega] &= \tau_2[\tau_1^i[\Omega,\Omega],\tau_2^i[\Omega,\Omega]]
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω τύποι εύκολα γενικεύονται και στην περίπτωση που έχουμε m αναδρομικές εξισώσεις.

Παράδειγμα 3.20 Το νόημα των $\mathtt{F}_1$ και $\mathtt{F}_2$ του Παραδείγματος 3.19 μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους. Εχουμε:

$$\begin{aligned}
\tau_1^0[\Omega,\Omega] &= \Omega\\
\tau_2^0[\Omega,\Omega] &= \Omega
\end{aligned}$$

Πηγαίνοντας στο επόμενο επίπεδο, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\tau_1^1[\Omega,\Omega] &= if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 1\ else\ \tau_1^0[\Omega,\Omega](x-1)+\tau_2^0[\Omega,\Omega](x-1)\\
&= if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 1\ else\ \Omega(x-1)+\Omega(x-1)\\
&= if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 1\ else\ \perp
\end{aligned}$$

Ομοίως:

$$\begin{aligned}
\tau_2^1[\Omega,\Omega] &= if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 0\ else\ \tau_2^0[\Omega,\Omega](x+1)\\
&= if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 0\ else\ \Omega(x+1)\\
&= if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 0\ else\ \perp
\end{aligned}$$

Συνεχίζοντας τη διαδικασία αυτή, μπορεί κανείς να δείξει ότι:

$$lub\{\tau_1^i[\Omega,\Omega]\}(x) = if\ (x\ eq\ 0)\ or\ (x\ eq\ 1)\ then\ 1\ else\ \perp$$

και

$$lub\{\tau_2^i[\Omega,\Omega]\}(x) = if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 0\ else\ \perp$$

Οι δύο παραπάνω συναρτήσεις εκφράζουν το μαθηματικό νόημα του προγράμματος (δηλαδή το νόημα των αναδρομικών ορισμών της $\mathtt{F}_1$ και $\mathtt{F}_2$ αντίστοιχα). ■

3.5 Σχόλια

Η ενδεικτική σημασιολογία των αναδρομικών προγραμμάτων που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο αυτό, μπορεί να γενικευτεί για να δώσει νόημα σε ακόμη πιο πολύπλοκες γλώσσες. Αξίζει να σημειώσουμε οτι η γλώσσα των αναδρομικών προγραμμάτων που θεωρήσαμε είναι γλώσσα *πρώτης τάξης*, δεν υποστηρίζει δηλαδή συναρτήσεις υψηλής τάξης. Παρόμοιες μέθοδοι με αυτές που χρησιμοποιήσαμε μπορούν να υιοθετηθούν για να ορίσουμε τη σημασιολογία γλωσσών υψηλής τάξης (τέτοιες είναι για παράδειγμα η LISP, η Miranda, η Haskell, η Gofer, η ML, και άλλες).

Αξίζει επίσης να σημειώσουμε οτι η σημασιολογία που δώσαμε (η οποία στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως *σημασιολογία σταθερού σημείου*), μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως οδηγός για τη σωστή υλοποίηση μιας γλώσσας προγραμματισμού που υποστηρίζει συναρτήσεις. Πιο συγκεκριμένα, ο υλοποιητής μιας τέτοιας γλώσσας πρέπει να εξασφαλίσει οτι οι τεχνικές που χρησιμοποιεί ουσιαστικά υπολογίζουν τα ελάχιστα σταθερά σημεία των αναδρομικών ορισμών ενός προγράμματος. Αυτό δε συμβαίνει όμως γενικά: πολλές γλωσσες προγραμματισμού που υποστηρίζουν συναρτήσεις δεν ακολουθούν τη σημασιολογία σταθερού σημείου στις υλοποιήσεις τους για λόγους αποτελεσματικότητας, ευκολίας στην υλοποίηση, κλπ. Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί και διαφορετικές σημασιολογικές προσεγγίσεις οι οποίες καλύπτουν μαθηματικά τους μηχανισμούς εκτέλεσης των γλωσσών αυτών.

3.6 Ασκήσεις

1. Εστω Z^+ το επεκτεταμένο σύνολο των ακεραίων αριθμών. Στο σύνολο αυτό ορίζουμε δύο πράξεις:

   - Την φυσική επέκταση $- : (Z^+ \times Z^+) \rightarrow Z^+$ της γνωστής μας αφαίρεσης ακεραίων αριθμών.
   - Την ακόλουθη επέκταση $* : (Z^+ \times Z^+) \rightarrow Z^+$ του γνωστού μας πολλαπλασιασμού ακεραίων αριθμών:

   $$\begin{array}{rclcll} 0 * a & = & a * 0 & = & 0, & \forall a \in Z^+ \\ \perp * a & = & a * \perp & = & \perp, & \forall a \in Z^+ - \{0\} \end{array}$$

   (a) Δείξτε οτι η παραπάνω επέκταση του πολλαπλασιασμού είναι μονοτονική.

   (b) Εξετάστε αν ισχύουν οι ακόλουθες δύο ιδιότητες των ακεραίων αριθμών στις επεκτάσεις που κάναμε:

   - $(a - b) * c = a * c - b * c$
   - $(a * b) * c = a * (b * c)$

   Τι συμπέρασμα βγάζετε για τις γλώσσες προγραμματισμού γενικώτερα με βάση την απάντηση σας στο ερώτημα (b);

2. Να βρεθούν **όλες** οι μονοτονικές επεκτάσεις του δυαδικού λογικού τελεστή `or`. Για κάθε μία από αυτές περιγράψτε (χωρίς ιδιαίτερες λεπτομέρειες) πως θα μπορούσατε να την υλοποιήσετε.

   Υπόδειξη: Οι μονοτονικές επεκτάσεις του `or` δεν είναι πολλές.

3. Να αποδειχτεί το Θεώρημα 3.4 των σημειώσεων, ότι δηλαδή κάθε αλυσσίδα $\{f_i\}$ έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.

   Υπόδειξη: Κατασκευάστε κατ'αρχήν τη συνάρτηση αυτή.

4. Εστω $\equiv : (N^+ \times N^+) \rightarrow \{true, false\}^+$ η ισχυρή συνάρτηση ισότητας, η οποία ορίζεται

ως εξής:

$$\begin{aligned}(a \equiv a) &= true,\ \forall a \in N\\ (a \equiv b) &= false,\ \forall a, b \in N \text{ με } a \neq b\\ (\perp \equiv \perp) &= true\\ (a \equiv \perp) &= false,\ \forall a \in N\\ (\perp \equiv a) &= false,\ \forall a \in N\end{aligned}$$

Η συνάρτηση αυτή δεν είναι μονοτονική (γιατί;). Να δείξετε οτι και το συναρτησιοειδές $\tau : [N^+ \rightarrow N^+] \rightarrow [N^+ \rightarrow N^+]$:

$$\tau[F](x) = if\ (F(x) \equiv \perp)\ then\ 0\ else\ \perp$$

δεν είναι μονοτονικό.

5. Εστω το ακόλουθο αναδρομικό πρόγραμμα (το οποίο υποθέτουμε ότι ορίζεται στο σύνολο των φυσικών αριθμών):

$$\mathtt{F(x,y)} \doteq \mathtt{if\ (x\ eq\ 0)\ then\ 1\ else\ F(x-1, F(x,y))}$$

   (a) Υπολογίστε το νόημα του προγράμματος με τη μέθοδο του ελάχιστου σταθερού σημείου.

   (b) Ποιά είναι η τιμή του `F(2,3)` όταν υλοποιήσουμε το πρόγραμμα αυτό σε C; Ποιά είναι η τιμή του `F(2,3)` όταν υλοποιήσουμε το πρόγραμμα αυτό στη γλώσσα προγραμματισμού GOFER; Τι συμπέρασμα βγάζετε για τον τρόπο που υλοποιούν τις συναρτήσεις οι δύο αυτές γλώσσες;