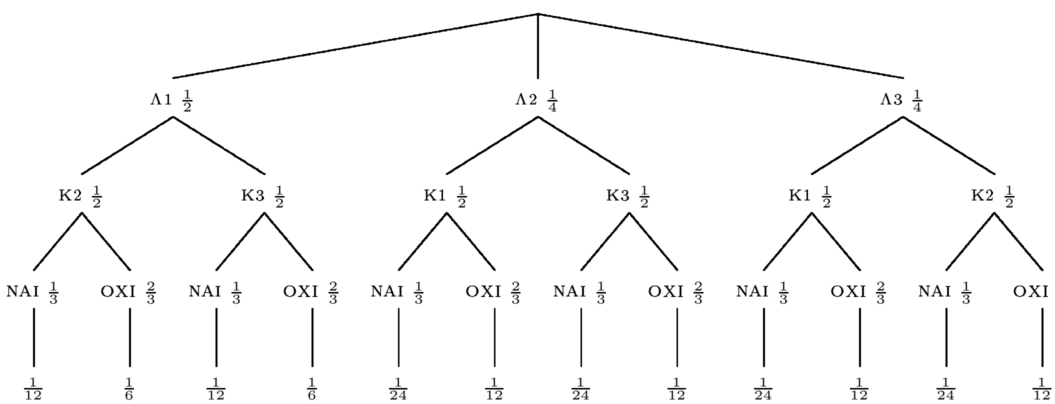
Πανεπιστημιο Αθηνων, Διακριτα Μαθηματικα, Αρτιοι ΑΜ
Τριτο συνολο Ασκησεων, εαρινο εξαμηνο 2008-2009
Γραφηματα, δενδρα, αριθμητικες συναρτησεις

***Άσκηση* 1** Ρίχνουμε 3 ζάρια. Ποια η πιθανότητα να έρθουν ακριβώς 2 εξάρια; Ποια η πιθανότητα να μην έρθει κανένα εξάρι; Ποια η πιθανότητα να έρθει τουλάχιστον ένα εξάρι;

Λύση.
Για το πρώτο ενδεχόμενο έχουμε $\binom{3}{2}$ διαφορετικές περιπτώσεις όπου διαλέγουμε ποια 2 θα έχουν φέρει 6 και το άλλο κάτι διαφορετικό. Αυτές οι περιπτώσεις είναι ξένες μεταξύ τους και κάθε μία έχει πιθανότητα $(1/6)(1/6)(5/6)$. Άρα η πιθανότητα του πρώτου ενδεχομένου είναι $\binom{3}{2}(1/6)(1/6)(5/6)$. Για το δεύτερο έχουμε $5/6$ πιθανότητα για το κάθε ζάρι να μη φέρει 6. Τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα, άρα η πιθανότητα του ζητούμενου είναι $5^3/6^3$. Για το τρίτο είναι πιο εύκολο να υπολογίσουμε την πιθανότητα του συμπληρωματικού ενδεχομένου: να μην έρθει κανένα εξάρι, το οποίο είναι το προηγούμενο. Αλλιώς, έστω A, B, C τα ενδεχόμενα να φέρει εξάρι το πρώτο, δεύτερο και τρίτο ζάρι αντίστοιχα. Έχουμε $P(A) = P(B) = P(C) = 1/6$, $P(A\cap B) = P(B\cap C) = P(C\cap A) = 1/36$ και $P(A\cap B\cap C) = 1/216$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(B\cap C) - P(C\cap A) + P(A\cap B\cap C)$ σύμφωνα με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού.

***Άσκηση* 2** Μια λεοπάρδαλη κατοικεί στη σπηλιά Α με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, στη σπηλιά Β με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ και στη σπηλιά Γ με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Ένα κουνέλι μπαίνει σε κάποια από τις δύο σπηλιές που δεν κατοικούνται με ίση πιθανότητα. Το κουνέλι αφήνει ίχνη μπροστά από τη σπηλιά που μπήκε με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, ενώ οι λεοπαρδάλεις δεν αφήνουν ποτέ ίχνη. Ποιά είναι η πιθανότητα να κατοικεί η λεοπάρδαλη στη σπηλιά 3 δεδομένου ότι δεν υπάρχουν ίχνη μπροστά από τη σπηλιά 2;

Λύση.
Το δέντρο που απεικονίζει το δειγματικό χώρο είναι το ακόλουθο:



Στο πρώτο επίπεδο φαίνονται οι επιλογές για την λεοπάρδαλη, στο δεύτερο επίπεδο οι επιλογές για το κουνέλι, στο τρίτο επίπεδο οι επιλογές για το αν υπάρχουν ίνχη ή όχι μπροστά από τις σπηλιές και στο τελευταίο επίπεδο οι πιθανότητες για κάθε ενδεχόμενο από τη ρίζα με κατεύθυνση προς το τρίτο επίπεδο (π.χ. η πιθανότητα να κατοικεί η λεοπάρδαλη στη σπηλιά 2, το κουνέλι να μπήκε στη σπηλιά 3 και να μην έχει αφήσει ίχνη είναι $\frac{1}{12}$). Η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει είναι:

$$\frac{P(\text{Λ3-K1-NAI}) + P(\text{Λ3-K1-OXI}) + P(\text{Λ3-K2-OXI})}{1 - (P(\text{Λ1-K2-NAI}) + P(\text{Λ3-K2-NAI}))} = \frac{\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}}{1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{24}} = \frac{5}{21}$$

Στον παρονομαστή χρησιμοποιήσαμε για ευκολία το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του «δεν υπάρχουν ίχνη μπροστά από τη σπηλιά 2».

***Άσκηση* 3** Να αντικαταστήσετε το ? με τον κατάλληλο συμβολισμό O, Ω, Θ (ή και κανένα από αυτά) στα παρακάτω : (1) $n^3 2^n = ?(4^n)$ (2) $n^2 \log(n) = ?(n^3 + n^2)$ (3) $2^{n \cos 2\pi n} = ?(n)$ (4) $4n^2 = ?(n^2 - 10)$

Λύση.

(1) O (2) O (3) κανένα από αυτά (4) Θ.

***Άσκηση* 4** Δείξτε πως αν για 2 συναρτήσεις $f(n)$ και $g(n)$ (με $f(n), g(n) \geq 2$) ισχύει $f(n) = O(g(n))$, τότε ισχύει επίσης $\log(f(n)) = O(\log(g(n)))$

Λύση.

Θα υπάρχουν σταθερές c και n' ώστε $f(n) \leq cg(n)$ για κάθε $n \geq n'$. Τότε $\log(f(n)) \leq \log(cg(n)) = \log(c) + log(g(n)) \leq (1 + |\log(c)|)\log(g(n))$ για κάθε $n \geq n'$.

***Άσκηση* 5** Βρείτε το λάθος στην παρακάτω απόδειξη:

Θα δείξουμε με μαθηματική επαγωγή ότι $n^2 = O(n)$. Για $n = 1$ υπάρχει σταθερά $c = 1$ έτσι ώστε $n^2 = 1n$. Έστω ότι ισχύει για n, δηλαδή υπάρχει σταθερά c ώστε $n^2 \leq cn$. Για $n + 1$ έχουμε $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq cn + 2n + 1 \leq (c+3)n$, άρα η κατάλληλη σταθερά για το $n + 1$ είναι η $c + 3$.

Λύση.

Η σταθερά του ορισμού πρέπει να είναι η ίδια για όλες τις τιμές του n. Στην παραπάνω απόδειξη, η σταθερά της υπόθεσης διαφέρει από αυτή του βήματος. (Διαβάστε προσεκτικά τον ορισμό του $O()$.)

***Άσκηση* 6** (1) Πόσοι διαφορετικοί γράφοι με 5 κόμβους υπάρχουν; Γενικεύστε για n κόμβους. (2) Πόσοι διαφορετικοί γράφοι με n κόμβους και m ακμές υπάρχουν (με $m \leq n(n-1)/2$); Θεωρήστε ότι οι κόμβοι είναι διακεκριμένοι μεταξύ τους, δηλαδή ο γράφος τριών κόμβων u, v, w με ακμή μόνο μεταξύ u, v είναι διαφορετικός από το γράφο με ακμή μόνο μεταξύ v, w.

Λύση.

(1) Θεωρούμε όλες τις $5(5-1)/2 = 10$ διαφορετικές ακμές που μπορούν να υπάρξουν. Για κάθε ακμή έχουμε 2 επιλογές: να υπάρχει στο γράφο ή να μην υπάρχει. Οπότε το πλήθος των γράφων με 5 κόμβους είναι 2^{10}. Γενικά για n κόμβους το πλήθος των γράφων είναι $2^{n(n-1)/2}$. (2) Έχουμε να επιλέξουμε ποιες m από τις $n(n-1)/2 = \binom{n}{2}$ δυνατές ακμές υπάρχουν στο γράφο. Το πλήθος των γράφων είναι $\binom{n(n-1)/2}{m}$.

***Άσκηση* 7** Χαρακτηρίστε όλα τα δένδρα που έχουν ακριβώς δύο φύλλα.

Λύση.

Τα δένδρα αυτά έχουν τη μορφή ενός ανάποδου Y. Η ρίζα του δένδρου θα έχει το πολύ δύο παιδιά, διαφορετικά αν έχει περισσότερα, τότε κάθε ένα από τα υποδένδρα ριζωμένα στα παιδιά θα δώσει τουλάχιστον ένα φύλλο, οπότε το πλήθος των φύλλων στο δένδρο θα είναι πάνω από δύο. Κατεβαίνουμε από τη ρίζα στους απογόνους της μέχρι να συναντήσουμε τον πρώτο κόμβο v που έχει δύο παιδιά (αν αυτός είναι η ρίζα, τότε το δένδρο έχει τη μορφή ανάποδου V). Ελέγξτε ότι τα υποδένδρα που είναι ριζωμένα στα παιδιά του v είναι μονοπάτια, δηλαδή μια ακολουθία από κόμβους βαθμού 2 που καταλήγουν στο φύλλο βαθμού 1.

***Άσκηση* 8** Σύμφωνα με το Θεώρημα Ramsey (στην απλή μορφή του) σε κάθε ομάδα 6 ατόμων είτε υπάρχουν 3 που γνωρίζονται μεταξύ τους είτε υπάρχουν 3 που είναι άγνωστα μεταξύ τους (οι γνωριμίες είναι συμμετρικές). Αποδείξτε το παραπάνω Θεώρημα.

Λύση.

Θεωρούμε το γράφο με έξι κόμβους που αντιστοιχούν στα άτομα , όπου μεταξύ 2 κόμβων υπάρχει ακμή μόνον αν τα αντίστοιχα άτομα γνωρίζονται. Το ζητούμενο είναι να βρούμε μία κλίκα 3 κόμβων ή ένα ανεξάρτητο σύνολο 3 κόμβων. Διαλέγουμε έναν αυθαίρετο κόμβο u. Αν ο u έχει βαθμό τουλάχιστον 3 τότε αν κάποιοι 2 από τους τουλάχιστον 3 γείτονες του συνδέονται, τότε μαζί με τον u σχηματίζουν κλίκα 3 κόμβων. Ενώ αν δεν υπάρχουν 2 από αυτούς που να συνδέονται τότε οι γείτονές του u σχηματίζουν ανεξάρτητο σύνολο 3 κόμβων. Αν ο u έχει βαθμό μικρότερο από 3 τότε τουλάχιστον 3 κόμβοι δεν είναι γειτονικοί του. Αν υπάρχουν έστω και 2 κόμβοι ανάμεσα σε αυτούς που επίσης δεν είναι γειτονικοί, τότε μαζί με τον u σχηματίζουν ανεξάρτητο σύνολο, διαφορετικά αν και οι τρεις είναι γειτονικοί μεταξύ τους σχηματίζουν κλίκα.

***Άσκηση* 9** Ένας γράφος λέγεται διμερής αν οι κόμβοι του διαμερίζονται σε 2 μη κενά και ξένα μεταξύ τους σύνολα V και U έτσι ωστε να μην υπάρχει ακμή μεταξύ κόμβων του V ή ακμή μεταξύ κόμβων του U. Αποδείξτε ότι ένας γράφος είναι διμερής αν και μόνον αν έχει μόνο κύκλους αρτίου μήκους.

Λύση.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι ο γράφος είναι συνεκτικός (αλλιώς επαναλαμβάνουμε τα επιχειρήματα σε κάθε συνεκτική συνιστώσα). Αν ένας γράφος είναι διμερής, τότε κάθε φορά που διασχίζουμε μία ακμή, αλλάζουμε σύνολο από το V στο U ή από το U στο V. Αν ξεκινήσουμε λοιπόν από ένα κόμβο και διασχίσουμε έναν κύκλο καταλήγοντας στον ίδιο κόμβο θα πρέπει να έχουμε αλλάξει σύνολο άρτιο πλήθος φορών άρα οι ακμές που έχουμε διασχίσει είναι αρτίου πλήθους.

Αντίστροφα έστω ότι ένας γράφος έχει μόνο κύκλους αρτίου μήκους. Θα δειχθεί με ισχυρή επαγωγή στο πλήθος c των κύκλων ότι αυτός είναι διμερής.
Στη βάση της επαγωγής , εάν ο γράφος έχει $c = 0$ κύκλους, τότε αυτός θα είναι δένδρο. Φτιάχνουμε τα σύνολα U και V ως εξής : βάζουμε την ρίζα στο U, τα παιδιά της στο V, τα παιδιά των παιδιών της στο U κτλ. Ελέγξτε ότι αυτή η διαδικασία κατασκευάζει πράγματι τα σύνολα U και V ενός διμερούς γράφου.
Έστω ότι η πρόταση ισχύει για γράφους με $c \leq k$ κύκλους. Θα δειχθεί ότι ισχύει για γράφους με $c = k+1$ κύκλους. Αφαιρούμε από το γράφο μία ακμή που σπάει έναν κύκλο (ή και περισσότερους). Έστω a και b οι κόμβοι στα άκρα της ακμής αυτής. Ο προκύπτων γράφος είναι διμερής από επαγωγική υπόθεση. Μένει να δείξουμε ότι οι a και b είναι σε διαφορετικά σύνολα , οπότε και ο αρχικός γράφος θα είναι διμερής. Από την υπόθεση ότι ο γράφος έχει κύκλους αρτίου μήκους έχουμε ότι όλα τα μονοπάτια από τον a στον b είναι περιττού μήκους, διαφορετικά μαζί με την ακμή που αφαιρέσαμε θα σχηματίζαμε κύκλο περιττού μήκους. Εφόσον διασχίζοντας κάθε ακμή στο μονοπάτι από τον a στον b αλλάζουμε σύνολο και έχουμε περιττό πλήθος ακμών, πράγματι ισχύει ότι οι a και b είναι σε διαφορετικά σύνολα. Επομένως και ο αρχικός γράφος είναι διμερής.

***Άσκηση* 10** Σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφο, το άθροισμα των βαθμών των κόμβων του είναι ίσο με το διπλάσιο του πλήθους των ακμών του. Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο θεώρημα για κατευθυνόμενους γράφους.

Λύση.

Σε έναν κατευθυνόμενο γράφο, έσω-βαθμός ενός κόμβου είναι το πλήθος των ακμών που καταλήγουν σε αυτόν και έξω-βαθμός είναι το πλήθος των ακμών που ξεκινούν από αυτόν. Κάθε ακμή συνεισφέρει ακριβώς 1 στον έσω-βαθμό κάποιου κόμβου και ακριβώς 1 στον έξω-βαθμό κάποιου άλλου. Άρα το άθροισμα των έσω-βαθμών (ή των έξω-βαθμών) είναι ίσο με το πλήθος των ακμών.

***Άσκηση* 11** Οι κύβοι n-διάστασης είναι μία ειδική κατηγορία γράφων. Ως κύβος 0-διάστασης ορίζεται ο γράφος με έναν μόνο κόμβο, κύβος 1-διάστασης είναι ο γράφος -ευθύγραμο τμήμα που αποτελείται από 2 κόμβους που συνδέονται με μία ακμή, κύβος 2-διαστάσεων είναι ο γράφος τεσσάρων κόμβων που σχηματίζουν τετράγωνο, κύβος 3-διαστάσεων είναι ο γράφος οκτώ κόμβων που σχηματίζουν κύβο. Γενικά ο n-διάστατος κύβος κατασκευάζεται αν πάρουμε δύο $(n-1)$-διάστατους κύβους και ενώσουμε τους ομόλογους κόμβους (δηλαδή αυτούς που θα είχαν το ίδιο όνομα αν είχαμε 2 πανομοιότυπους κύβους). Απόδείξτε ότι για $n \geq 2$ ο n-διάστατος κύβος έχει κύκλο Hamilton. (Υπόδειξη: Βρείτε έναν κύκλο Hamilton στον κύβο 3-διαστάσεων και γενικεύστε την ιδέα σας.)

Λύση.
Η πρόταση θα αποδειχθεί με επαγωγή στη διάσταση n του κύβου. Βάση της επαγωγής: Για $n = 2$ ο κύβοσ-τετράγωνο έχει προφανή κύκλο Hamilton.
Έστω ότι n-διάστατος κύβος έχει κύκλο Hamilton. Θεωρούμε τους δύο n-διάστατους κύβους του $n+1$-διάστατου κύβου και σε καθέναν από αυτούς τους κύκλους Hamilton της επαγωγικής υπόθεσης. Έστω a , b και a' , b' 2 γειτονικοί κόμβοι στο κάθε κύκλο αντίστοιχα (οι a' , b' είναι οι ομόλογοι των a , b). Αφαιρούμε τις 2 αυτές ακμές και βάζουμε τις (a,a') και (b,b'). Επαληθεύστε ότι πράγματι προκύπτει κύκλος Hamilton για τον $(n+1)$-διάστατο κύβο.

Άσκηση 12 Σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφο n κόμβων, έχουμε πάνω από $(n-1)(n-2)/2$ ακμές. Αποδείξτε ότι αυτός είναι οπωσδήποτε συνεκτικός.

Λύση.
Έστω ότι δεν είναι συνεκτικός. Θεωρούμε μία συνεκτική συνιστώσα του με k κόμβους. Στο γράφο σίγουρα λείπουν οι ακμές που συνδέουν κάθε κόμβο της συνιστώσας με κάθε άλλο που δεν ανήκει σε αυτήν, οι οποίες είναι $k(n-k)$ στο πλήθος. Άρα υπάρχουν το πολύ $n(n-1)/2 - k(n-k)$ ακμές. Ελέγξτε ότι $n(n-1)/2 - k(n-k) \leq (n-1)(n-2)/2$ για $1 \leq k \leq n-1$. ($(n-1)(n-2)/2 = (n)(n-1)/2 - (n-1)$ άρα αρκεί να ισχύει $(n-1) \leq k(n-k)$. Η έκφραση $k(n-k)$, για $1 \leq k \leq n-1$, παίρνει την ελάχιστη τιμή της για $k = 1$ ή για $k = n-1$.)