Πανεπιστημιο Αθηνων, Διακριτα Μαθηματικα, Αρτιοι ΑΜ
Τριτο συνολο Ασκησεων, εαρινο εξαμηνο 2008-2009
Γραφηματα, δενδρα, αριθμητικες συναρτησεις

Άσκηση 1 Ρίχνουμε 3 ζάρια. Ποια η πιθανότητα να έρθουν ακριβώς 2 εξάρια; Ποια η πιθανότητα να μην έρθει κανένα εξάρι; Ποια η πιθανότητα να έρθει τουλάχιστον ένα εξάρι;

Άσκηση 2 Μια λεοπάρδαλη κατοικεί στη σπηλιά Α με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, στη σπηλιά Β με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ και στη σπηλιά Γ με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Ένα κουνέλι μπαίνει σε κάποια από τις δύο σπηλιές που δεν κατοικούνται με ίση πιθανότητα. Το κουνέλι αφήνει ίχνη μπροστά από τη σπηλιά που μπήκε με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, ενώ οι λεοπαρδάλεις δεν αφήνουν ποτέ ίχνη. Ποιά είναι η πιθανότητα να κατοικεί η λεοπάρδαλη στη σπηλιά 3 δεδομένου ότι δεν υπάρχουν ίχνη μπροστά από τη σπηλιά 2;

Άσκηση 3 Να αντικαταστήσετε το ? με τον κατάλληλο συμβολισμό Ο, Ω, Θ (ή και κανένα από αυτά) στα παρακάτω : (1) $n^3 2^n = ?(4^n)$ (2) $n^2 \log(n) = ?(n^3+n^2)$ (3) $2^{n\cos 2\pi n} = ?(n)$ (4) $4n^2 = ?(n^2-10)$

Άσκηση 4 Δείξτε πως αν για 2 συναρτήσεις $f(n)$ και $g(n)$ (με $f(n)$,$g(n) \geq 2$) ισχύει $f(n) = O(g(n))$, τότε ισχύει επίσης $\log(f(n)) = O(\log(g(n)))$

Άσκηση 5 Βρείτε το λάθος στην παρακάτω απόδειξη:
Θα δείξουμε με μαθηματική επαγωγή ότι $n^2 = O(n)$. Για $n = 1$ υπάρχει σταθερά $c = 1$ έτσι ώστε $n^2 = 1n$. Έστω ότι ισχύει για n, δηλαδή υπάρχει σταθερά c ώστε $n^2 \leq cn$. Για $n+1$ έχουμε $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq cn + 2n + 1 \leq (c+3)n$, άρα η κατάλληλη σταθερά για το $n+1$ είναι η $c+3$.

Άσκηση 6 (1) Πόσοι διαφορετικοί γράφοι με 5 κόμβους υπάρχουν; Γενικεύστε για n κόμβους. (2) Πόσοι διαφορετικοί γράφοι με n κόμβους και m ακμές υπάρχουν (με $m \leq n(n-1)/2$); Θεωρήστε ότι οι κόμβοι είναι διακεκριμένοι μεταξύ τους, δηλαδή ο γράφος τριών κόμβων u, v, w με ακμή μόνο μεταξύ u, v είναι διαφορετικός από το γράφο με ακμή μόνο μεταξύ v, w.

Άσκηση 7 Χαρακτηρίστε όλα τα δένδρα που έχουν ακριβώς δύο φύλλα.

Άσκηση 8 Σύμφωνα με το Θεώρημα Ramsey (στην απλή μορφή του) σε κάθε ομάδα 6 ατόμων είτε υπάρχουν 3 που γνωρίζονται μεταξύ τους είτε υπάρχουν 3 που είναι άγνωστα μεταξύ τους (οι γνωριμίες είναι συμμετρικές). Αποδείξτε το παραπάνω Θεώρημα.

Άσκηση 9 Ένας γράφος λέγεται διμερής αν οι κόμβοι του διαμερίζονται σε 2 μη κενά και ξένα μεταξύ τους σύνολα V και U έτσι ωστε να μην υπάρχει ακμή μεταξύ κόμβων του V ή ακμή μεταξύ κόμβων του U. Αποδείξτε ότι ένας γράφος είναι διμερής αν και μόνον αν έχει μόνο κύκλους αρτίου μήκους.

Άσκηση 10 Σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφο, το άθροισμα των βαθμών των κόμβων του είναι ίσο με το διπλάσιο του πλήθους των ακμών του. Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο θεώρημα για κατευθυνόμενους γράφους.

Άσκηση 11 Οι κύβοι n-διάστασης είναι μία ειδική κατηγορία γράφων. Ως κύβος 0-διάστασης ορίζεται ο γράφος με έναν μόνο κόμβο, κύβος 1-διάστασης είναι ο γράφος -ευθύγραμο τμήμα που αποτελείται από 2 κόμβους που συνδέονται με μία ακμή, κύβος 2-διαστάσεων είναι ο γράφος τεσσάρων κόμβων που σχηματίζουν τετράγωνο, κύβος 3-διαστάσεων είναι ο γράφος οκτώ κόμβων που σχηματίζουν κύβο. Γενικά ο n-διάστατος κύβος κατασκευάζεται αν πάρουμε δύο $(n-1)$-διάστατους κύβους και ενώσουμε τους ομόλογους κόμβους (δηλαδή αυτούς που θα είχαν το ίδιο όνομα αν είχαμε 2 πανομοιότυπους κύβους). Απόδείξτε ότι για $n \geq 2$ ο n-διάστατος κύβος έχει κύκλο Hamilton. (Υπόδειξη: Βρείτε έναν κύκλο Hamilton στον κύβο 3-διαστάσεων και γενικεύστε την ιδέα σας.)

Άσκηση 12 Σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφο n κόμβων, έχουμε πάνω από $(n-1)(n-2)/2$ ακμές. Αποδείξτε ότι αυτός είναι οπωσδήποτε συνεκτικός.