Δένδρα [**Liu**, κεφ. 6]

Ορισμοί

Ορ. Δένδρο είναι συνεκτικό, μη κατευθυνόμενο γράφημα, χωρίς (στοιχειώδη) κυκλώματα.

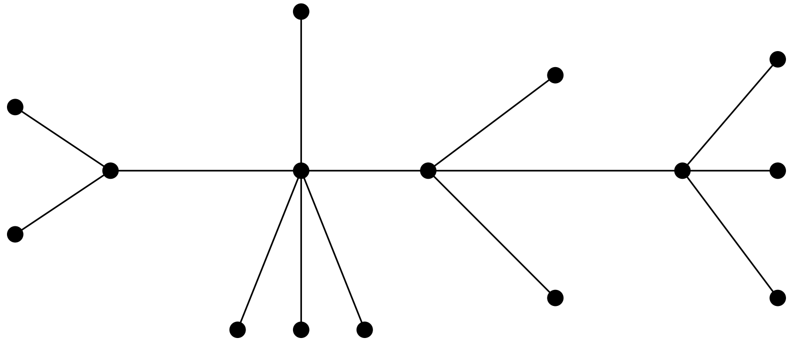
Ορ. Δάσος είναι ένα γράφημα όπου κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι δένδρο.

Ορ. Φύλλο ενός δέντρου είναι κάθε κορυφή βαθμού 1.

Ορ. Εσωτερικός κόμβος ενός δένδρου είναι κάθε κορυφή βαθμού > 1.

Παράδειγμα

Π.χ. Γενεαλογικό δένδρο ή Δομή δεδομένων



Ένα δένδρο n κορυφών είναι το «ελάχιστο» συνεκτικό γράφημα με αυτό τον αριθμό κόμβων.

Ιδιότητες

Σε δέντρο $T = (V, E)$

1. Για κάθε 2 κορυφές $v, w \in V$, υπάρχει μοναδικό μονοπάτι που τις ενώνει.
2. $|V| = |E| + 1$.
3. $|V| \geq 2 \Rightarrow$ #φύλλων ≥ 2

Απόδ. Ιδιότητα (1) :
Δένδρο είναι συνεκτικό γράφημα $\Rightarrow \exists$ μονοπάτι ανάμεσα σε οποιεσδήποτε 2 κορυφές v, w.
Αν υπάρχουν 2 μονοπάτια $v \rightsquigarrow w \Rightarrow \exists$ κύκλωμα [άτοπο] $\square$

Ιδιότητες

Απόδ. Ιδιότητα (2), με επαγωγή:

Βάση: #κορυφών $= 1 \Rightarrow$ #ακμών $= 0$
#κορυφών $= 2 \Rightarrow$ #ακμών $= 1$

Βήμα: Αφαιρώ ακμή $\{a, b\} \in E$ από δένδρο $T = (V, E)$

Έχω δάσος 2 δένδρων με $T_1 = (V_1, E_1)$, $T_2 = (V_2, E_2)$ όπου

$$\left.\begin{array}{ll} |V_1| + |V_2| = |V| & |E_1| + |E_2| = |E| - 1 \\ |V_1| = |E_1| + 1 & |V_2| = |E_2| + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$|V| = |E_1| + |E_2| + 2 \Rightarrow |V| = |E| + 1$$

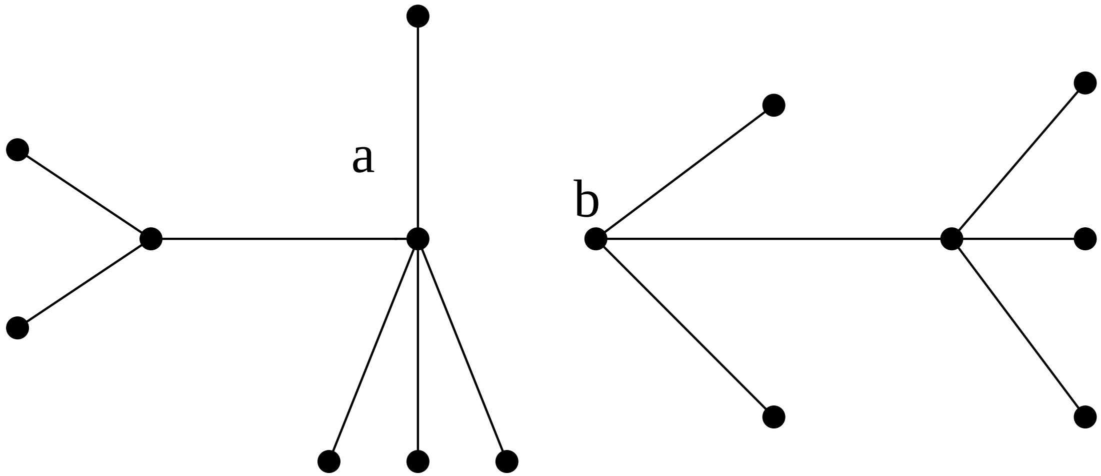
$\square$

Ιδιότητες

Απόδ. Ιδιότητα (2), επεξήγηση ...
Έστω $\{a, b\} \in E$ ακμή που αφαιρείται. Όρισε V_1 το σύνολο κορυφών v για τις οποίες $\{a, b\} \notin (v \rightsquigarrow a)$. Οποιαδήποτε $v \in V_1$ δεν συνδέεται με το b, ειδάλλως κύκλωμα.
Οι κορυφές του V_1 ορίζουν το υποδένδρο T_1 του a.

Ομοίως υποδένδρο T_2 του b.

2 υποδένδρα διαζευγμένα.



$\square$

Ιδιότητες

Απόδ. Ιδιότητα (3)

Έστω $d(v)$ ο βαθμός του κόμβου v.

$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| = 2(|V| - 1) = 2|V| - 2$ από Ιδιότητα (2)

Έστω $|V| \geq 2$ και $\nexists v \in V : \quad d(v) = 0$.

Περ. 1: Αν μοναδικό
$v \in V : \; d(v) = 1 \Rightarrow \sum_{v \in V} d(v) \geq 1 + 2(|V| - 1) = 2|V| - 1 \downarrow$

Περ. 2: Αν $\nexists v \in V : d(v) = 1 \Rightarrow \sum_{v \in V} d(v) \geq 2|V| \boxed{\text{ΑΤΟΠΟ}} \downarrow$

Επομένως τουλάχιστον δύο κόμβοι με βαθμό ένα (=φύλλα). $\square$

Ισοδύναμοι ορισμοί

Γράφημα $T = (V, E)$ είναι δένδρο αν και μόνο αν $\forall v, w \in V$ $\exists$ μοναδικό μονοπάτι $v \rightsquigarrow w$.

Απόδ. $[\Leftarrow]$
συνεκτικό γράφημα διότι $\forall v, w \in V$, $\exists$ μονοπάτι $v \rightsquigarrow w$.
$\nexists$ κύκλωμα διότι $\exists$ μοναδικό μονοπάτι $v \rightsquigarrow w$. $\square$

Ισοδύναμοι ορισμοί

Γράφημα $T = (V, E)$ είναι δένδρο αν και μόνο αν συνεκτικό και $m = n - 1$ όπου $|V| = n$ και $|E| = m$.

Απόδ. $[\Leftarrow]$
$\exists$ (απλό) κύκλωμα $C : c = \#$κορυφών$(C) \Rightarrow \#$ακμών$(C) = c$

$n - c$ κορυφές $\notin C \Rightarrow$ για κάθε τέτοια κορυφή v υπάρχει μια διακεκριμένη ακμή $\{v, w\}$ που ξεκινάει το μονοπάτι που ενώνει τη v με τον κύκλο $\Rightarrow$ υπάρχουν $\geq n - c$ ακμές $\notin C$

$\Rightarrow m \geq (n - c) + c = n$ $\boxed{\text{ΑΤΟΠΟ}}$ $\downarrow$

$\therefore \nexists$ κύκλωμα $\square$

Ισοδύναμοι ορισμοί

Γράφημα $T = (V, E)$ είναι δένδρο αν και μόνο αν $\nexists$ κύκλωμα και $m = n - 1$ όπου $|V| = n$ και $|E| = m$.

Απόδ. $[\Leftarrow]$
Αρκεί να δείξουμε συνεκτικότητα.
Έστω G ΜΗ συνεκτικό με συνιστώσες $G_1, G_2, \ldots, G_k$,
όπου $k =$ #συνεκτικών συνιστωσών.

$G_1, G_2, \ldots$ συνεκτικοί και χωρίς κύκλωμα $\Rightarrow$ δένδρα
$\Rightarrow m_1 = n_1 - 1, m_2 = n_2 - 1, \ldots$
$\Rightarrow m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n_1 + n_2 + \cdots + n_k - k, \quad k \geq 2$
$\Rightarrow m = n - k, k \geq 2$
$\Rightarrow m \leq n - 2$ $\boxed{\text{ΑΤΟΠΟ}}$ $\downarrow$ $\square$

Παράδειγμα

Π.χ. Έστω n άτομα. Κάποιος από αυτούς γνωρίζει μια πληροφορία. Σε κάθε χρονική στιγμή $t = 1, 2, \ldots$ όποιος γνωρίζει την πληροφορία τη στέλνει σε άλλον/άλλους που δεν τη γνωρίζουν.

Παράδειγμα

Π.χ. Έστω n άτομα. Κάποιος από αυτούς γνωρίζει μια πληροφορία. Σε κάθε χρονική στιγμή $t = 1, 2, \ldots$ όποιος γνωρίζει την πληροφορία τη στέλνει σε άλλον/άλλους που δεν τη γνωρίζουν.

Έστω $G = (V, E)$ το γράφημα όπου οι κορυφές είναι τα άτομα και οι ακμές τα μηνύματα.

- Το G είναι συνεκτικό.
- Κάθε μήνυμα (ακμή) προσθέτει ένα νέο άτομο (κορυφή), στην ομάδα των ατόμων που έλαβαν την πληροφορία $\Longrightarrow$ Αριθμός ακμών $m = n - 1$.

Επομένως το G είναι δένδρο.

Δένδρα με ρίζα

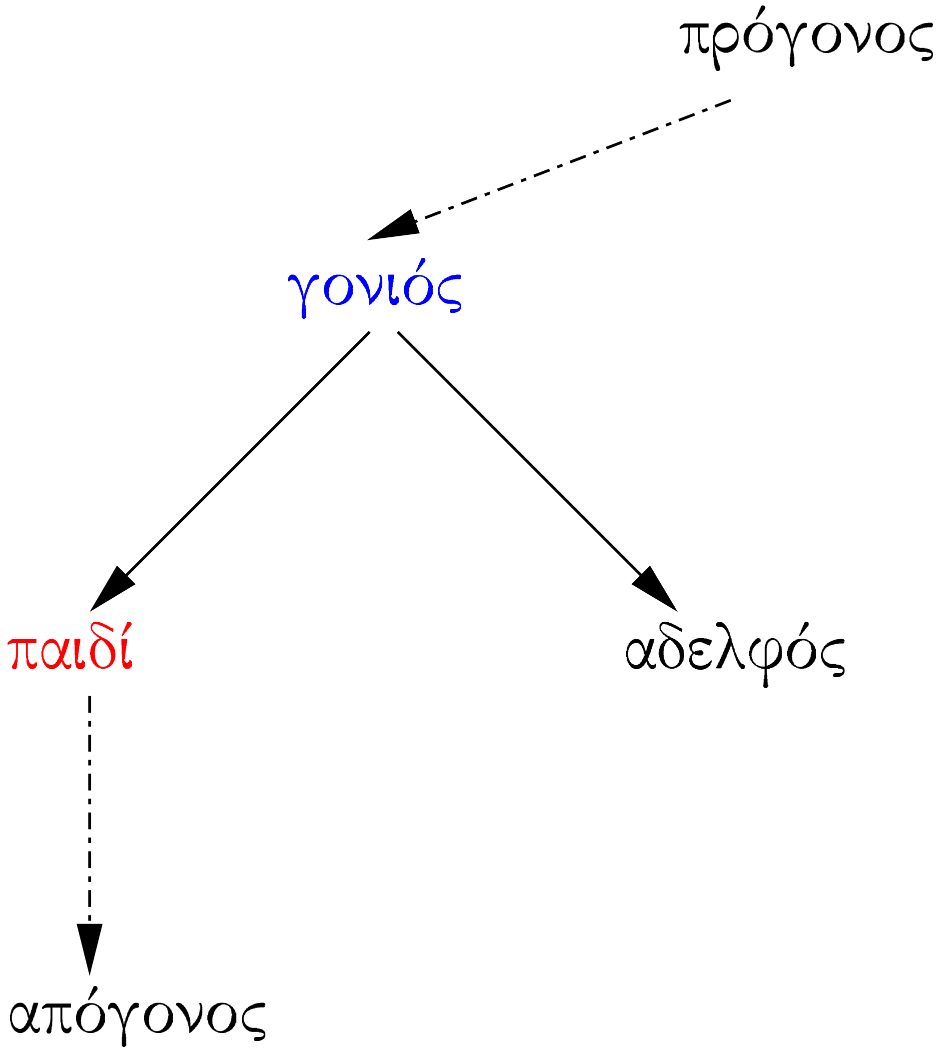
Ορ. Κατευθυνόμενο γράφημα είναι κατευθυνόμενο δένδρο, αν γίνεται δένδρο αγνοώντας τις κατευθύνσεις.

Ορ. Δένδρο με ρίζα είναι κατευθυνόμενο δένδρο που έχει μοναδική κορυφή v με εισερχ. βαθ. $= 0$ και για κάθε άλλη κορυφή εισερχ. βαθ $= 1$. Η κορυφή v ονομάζεται ρίζα του δέντρου.

Αν σχεδιάσουμε ένα δένδρο με τη ρίζα στο επάνω μέρος, παραλείπουμε συνήθως τις κατευθύνσεις στις ακμές γιατί εξυπονοούνται.

Παράδειγμα

Π.χ. Γενεαλογικό δένδρο



Ορισμοί

Απο εδώ και στο εξής ασχολούμαστε μόνο με δένδρα με ρίζα.

Ορ. $m-$αδικό δένδρο:
$\forall$ εσωτ. κόμβος (& ρίζα) έχει $\leq m$ παιδιά.

Ορ. Κανονικό $m-$αδικό δένδρο:
$\forall$ εσωτ. κόμβος (& ρίζα) έχει ακριβώς m παιδιά.

Αριθμός εσωτερικών κόμβων

Π.χ. Κανονικά δυαδικά δένδρα: οι εσωτερικοί κόμβοι αντιστοιχούν σε νοκ-άουτ αγώνες κυπέλλου.

Αριθμός εσωτερικών κόμβων

Π.χ. Κανονικά δυαδικά δένδρα: οι εσωτερικοί κόμβοι αντιστοιχούν σε νοκ-άουτ αγώνες κυπέλλου.

Λήμμ. Σε κανονικά δυαδικά δένδρα, #εσωτ $=$ #φύλλων -1.

Απόδ. $\forall$ αγώνα $\exists$ μοναδικός εσωτ. κόμβος και $\exists$ μοναδική ομάδα που φεύγει (εκτός κυπέλλου).
#αγώνων $=$ #ομάδ. που φεύγουν $=$ #ομάδων -1 $=$ #φύλλων -1.
Επομένως #εσωτ $=$ #αγώνων $=$ #φύλλων -1.

$\square$

Αριθμός εσωτερικών κόμβων

Π.χ. Κανονικά δυαδικά δένδρα: οι εσωτερικοί κόμβοι αντιστοιχούν σε νοκ-άουτ αγώνες κυπέλλου.

Λήμμ. Σε κανονικά δυαδικά δένδρα, $\#$εσωτ $=$ $\#$φύλλων -1.

Απόδ. $\forall$ αγώνα $\exists$ μοναδικός εσωτ. κόμβος και $\exists$ μοναδική ομάδα που φεύγει (εκτός κυπέλλου).
$\#$αγώνων $=$ $\#$ομάδ. που φεύγουν $=$ $\#$ομάδων -1 $=$ $\#$φύλλων -1.
Επομένως $\#$εσωτ $=$ $\#$αγώνων $=$ $\#$φύλλων -1.

$\square$

Απόδ. [Εναλλακτική] $2\,\#$ εσωτ. $=$ συνολ. $\#$παιδιών $=$ ($\#$εσωτ. -1) $+$ $\#$ φύλλων. $\square$

Κανονικά δένδρα

Λήμμ. Σε κανονικά $m-$αδικά δένδρα:
$(m-1)$#εσωτ.κόμβων $=$ #φύλλων $- 1$.

Απόδ.
Θεωρούμε #φύλλων $=$ #ομάδων.

$\forall$ εσωτ. κόμβο αποκλείει $m-1$ ομάδες $\Rightarrow$
$(m-1)$#εσωτ $=$ #(ομάδες εκτός κυπέλου) $\square$

Απόδ. [Εναλλακτική] m# εσωτ. $=$ συνολ. #παιδιών $=$
$=$ (#εσωτ. $- 1$) $+$ # φύλλων. $\square$

Κανονικά δένδρα

Π.χ. $\#\text{φύλλων} = (m-1)\#\text{εσωτ} + 1$,
δηλαδή $m = 4 \Longrightarrow \#\text{φύλλων} = 3\#\text{εσωτ} + 1$

Μήκος μονοπατιών

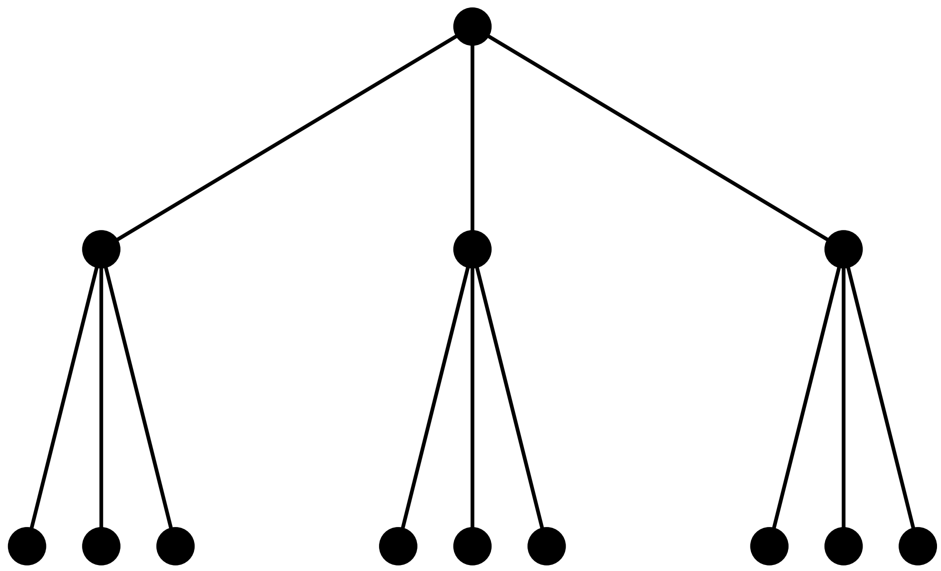
Ορ. Μήκος μονοπατιού κορυφής = #ακμών από κορυφή σε ρίζα.
Ύψος = max μήκος μονοπατιού.

Ύψος δένδρου

Λήμμ. m−αδικό δένδρο ύψους $h \Rightarrow$ #φύλλων $\leq m^h$.

Απόδ. Κάθε επίπεδο πολλαπλασιάζει επί m. $\square$

Π.χ. Ισότητα, #φύλλων $\leq 3^2 = 9$.

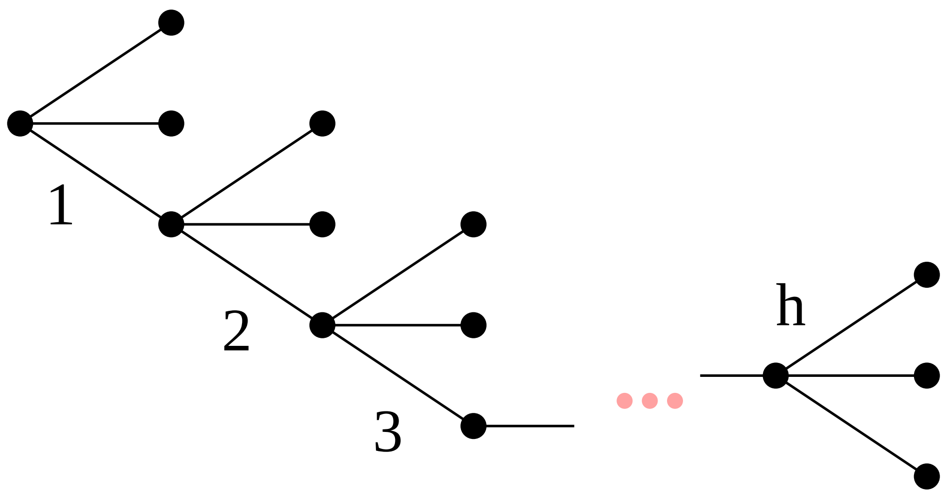


Ύψος δένδρου

Λήμμ. Κάθε κανονικό m−αδικό δένδρο ύψους h ικανοποιεί τη σχέση: $\#\text{φύλλων} \geq m + (m-1)(h-1)$.

Απόδ. $\#\phi = (m-1)\#\text{εσωτ} + 1$,
$\#\text{εσωτ} \geq h$,

$\Rightarrow \#\phi \geq (m-1)h + 1 = (m-1)(h-1) + (m+1-1)$.



$\square$

Ύψος δένδρου (συνέχεια)

Λήμμ. Σε κάθε m−αδικό δένδρο ύψους h με l φύλλα ισχύει $h \geq \lceil \log_m l \rceil$.

Υπόδειξη: σε ένα m−αδικό δένδρο, $l \leq m^h$.

Ύψος δένδρου (συνέχεια)

Λήμμ. Σε κάθε $m-$αδικό δένδρο ύψους h με l φύλλα ισχύει $h \geq \lceil \log_m l \rceil$.

Υπόδειξη: σε ένα $m-$αδικό δένδρο, $l \leq m^h$.

Ένα $m-$αδικό δένδρο ύψους h λέγεται ισοζυγισμένο αν όλα τα φύλλα είναι σε ύψος h ή $h-1$.

Λήμμ. Σε κάθε κανονικό ισοζυγισμένο $m-$αδικό δένδρο ύψους h με l φύλλα ισχύει $h = \lceil \log_m l \rceil$.

Υπόδειξη: σε ένα κανονικό ισοζυγισμένο $m-$αδικό δένδρο, $m^{h-1} < l$.