Μεταθέσεις και Συνδυασμοί [**Liu**, κεφ. 4]

Παραδείγματα Απαρίθμησης

Γνωστό: $|P(M)| = |2^M| =$ τρόποι επιλογής υποσυνόλου του M.

Π.χ. $M = \{A, B, C\}$.

- $|P(M)| = 2^3 = 8$.
- #(Υποσυνόλων με 2 στοιχεία) $= \binom{3}{2} = 3$.
- #(Διατεταγμένων υποσυνόλων με 2 στοιχεία) $= 3 \cdot 2 = 6$.

Π.χ. $M =$ Μπάλες μπιλιάρδου $= \{1, 2, \ldots, 15\}$.

- $|P(M)| = 2^{15} = 32768$.
- #(Υποσυνόλων με 3 μπάλες) $= \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} = 455$.
- #(Διατεταγμένων υποσυνόλων με 3 μπάλες) $=$ $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$.

Κανόνες αθροίσματος και γινομένου

Ορ. Πείραμα: Διαδικασία με συγκεκριμένο (αριθμήσιμο) σύνολο δυνατών / παρατηρήσιμων αποτελεσμάτων.

Π.χ. Ρίψη νομίσματος, ζαριού· επιλογή υποσυνόλου.

Έστω πειράματα με m και n δυνατά αποτελέσματα αντίστοιχα.

Θεώρ. [Κανόνας Γινομένου] Αν γίνουν και τα 2 πειράματα, υπάρχουν $m \cdot n$ δυνατά αποτελέσματα.

Θεώρ. [Κανόνας αθροίσματος] Αν γίνει ακριβώς ένα εκ των 2 πειραμάτων, δηλ. είτε το πρώτο πείραμα είτε το δεύτερο, τότε υπάρχουν ακριβώς $m + n$ δυνατά αποτελέσματα.

Παραδείγματα Κανόνων

Π.χ. $M = \{A, B, C\}$
#(Διατεταγμένων υποσυνόλων 2 στοιχείων) =
= #(επιλογών $1^{ης}$ θέσης) $\times$ #(επιλογών $2^{ης}$ θέσης)=$3 \cdot 2 = 6$

Π.χ. 15 μπάλες = 7 μονόχρωμες + 7 δίχρωμες + 1 μαύρη.
(Γινόμενο)
#(Επιλογών μίας μονόχρωμης και μίας δίχρωμης) = $7 \cdot 7 = 49$.

(Άθροισμα)
#(Επιλογών μίας μπάλας εκτός της μαύρης) = $7 + 7 = 14$.

Απαρίθμηση Διατάξεων

Μεταθέσεις (Διατάξεις χωρίς επανάληψη)

Έστω $r = n$ αριθμημένες μπάλες, n αριθμημένα κουτιά. Σε κάθε κουτί το πολύ 1 μπάλα.
#τοποθετήσεων $= n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$.
Ισούται με το πλήθος μεταθέσεων n αριθμών.

Θεώρ. r αριθμημένες μπάλες, n αριθμημένα κουτιά, $n \geq r$:
$P(n,r) :=$ #τοποθετήσεων $= n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Απόδ. 2 πειράματα: τοποθέτηση r και $n-r$ αριθμημ. μπαλών.
Οι $n-r$ έχουν $(n-r)!$ τοποθετήσεις σε $n-r$ κουτιά.
$\therefore n!$ τοποθετήσεις $= P(n,r)(n-r)!$ (κανόνας γινομένου) $\square$

Μεταθέσεις: ισοδύναμες περιγραφές

Θ. Έστω r αριθμημένες μπάλες, n αριθμημένα κουτιά, $n \geq r$:
#τοποθετήσεων $= n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} =: P(n,r)$.

- Ισοδύναμα, $P(n,r)$ μεταθέσεις r αντικειμένων (σε r αριθμημένες θέσεις) από n διαφορετικά αντικείμενα, $n \geq r$.

- Ισούται με το πλήθος μεταθέσεων r αριθμών από $\{1,\ldots,n\}$.

- r-άδες διαφορετικών στοιχείων $\in A \times \cdots \times A = A^r, |A| = n$.

Π.χ. $r = 2$ μπάλες σε $n = 3$ κουτιά με $P(3,2) = 3! = 6$ τρόπους:
$[a|b|\emptyset]$, $[b|a|\emptyset]$, $[a|\emptyset|b]$, $[b|\emptyset|a]$, $[\emptyset|a|b]$, $[\emptyset|b|a]$.

Παράδειγμα μεταθέσεων

Έστω 8 αθλητές που θα τρέξουν τα 100 μέτρα. Πόσοι τρόποι υπάρχουν να απονείμουμε το χρυσό, το ασημένιο και το χάλκινο μετάλλιο αν υποθέσουμε πως όλες οι διαφορετικές κατατάξεις είναι δυνατές.

Παράδειγμα μεταθέσεων

Έστω 8 αθλητές που θα τρέξουν τα 100 μέτρα. Πόσοι τρόποι υπάρχουν να απονείμουμε το χρυσό, το ασημένιο και το χάλκινο μετάλλιο αν υποθέσουμε πως όλες οι διαφορετικές κατατάξεις είναι δυνατές.

$n = 8, r = 3$

$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = 8!/(8-3)! = 8!/5! =$
$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots 8)/(1 \cdot 2 \cdot \ldots 5) = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336.$

Παράδειγμα μεταθέσεων

Π.χ. Δεκαδικοί αριθμοί με ακριβώς τέσσερα ψηφία που δεν ξεκινούν από μηδέν:
$10^4 - 10^3 = 9 \cdot 10^3 = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000.$

Π.χ. Τετραψήφιοι δεκαδικοί αριθμοί, χωρίς επαναλαμβανόμενα ψηφία και να μην ξεκινούν από 0.

- Μεταθέσεις 4 από 10 αντικείμενα $P(10,4) = \frac{10!}{6!} = 5040.$
  $|0xyz| = P(9,3) = \frac{9!}{6!} = 504.$

  Με τον κανόνα του αθροίσματος:
  $P(10,4) - |0xyz| = 5040 - 504 = 4536.$
- $|\mu xyz| = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536.$

Παράδειγμα μεταθέσεων

Π.χ. Δεν είναι μετάθεση Δεκαδικοί αριθμοί με ακριβώς τέσσερα ψηφία που δεν ξεκινούν από μηδέν:
$10^4 - 10^3 = 9 \cdot 10^3 = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000.$

Π.χ. Είναι μετάθεση Τετραψήφιοι δεκαδικοί αριθμοί, χωρίς επαναλαμβανόμενα ψηφία και να μην ξεκινούν από 0.

- Μεταθέσεις 4 από 10 αντικείμενα $P(10, 4) = \frac{10!}{6!} = 5040.$
  $|0xyz| = P(9, 3) = \frac{9!}{6!} = 504.$

  Με τον κανόνα του αθροίσματος:
  $P(10, 4) - |0xyz| = 5040 - 504 = 4536.$
- $|\mu xyz| = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536.$

Διατάξεις με επανάληψη

Θέλουμε να τοποθετήσουμε r αριθμημένες μπάλες σε n αριθμημένα κουτιά. Κάθε κουτί επιτρέπεται να πάρει πάνω από μία μπάλα. $\forall r, n$ υπάρχουν n^r διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης.

Ισοδύναμα,

- τρόποι διάταξης r αντικειμένων (σε r αριθμημένες θέσεις) από n είδη (αντικείμενα με επανάληψη).
- $r-$άδες στοιχείων $\in A \times \cdots \times A = A^r : |A| = n$, επιλογή με επανάληψη.

Π.χ. ΠΡΟΠΟ: 14 αγώνες, 3 δυνατά αποτελέσματα (1, 2, X). Όλες οι δυνατές στήλες (αποτελέσματα) είναι 3^{14}.

Παραδείγματα Διατάξεων

Π.χ. [**Liu, 3.7**(α)] #(Δυαδικές ακολουθίες με r ψηφία) $= 2^r$.

Π.χ. [**Liu, 3.7**(β)] #(Δυαδικές ακολουθίες r ψηφίων με άρτιο πλήθος από 1).

- Υπάρχουν 2^{r-1} δυαδικές ακολουθίες με $r-1$ ψηφία. (Γιατί;)
- Κατασκεύασε μια 1-1 και επί απεικόνιση από το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών $r-1$ ψηφίων στο σύνολο των δυαδικών ακολουθιών r ψηφίων με άρτιο πλήθος από 1. (Πώς;)
- Έπεται πως τα δύο σύνολα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων.

Παράδειγμα Διατάξεων

Π.χ. [**Liu, 3.7**(γ)] Ακολουθίες με r ψηφία $\in \{0,1,2,3,4\}$. Πόσες έχουν άρτιο πλήθος από 1;

- 3^r περιέχουν μόνο $\{2,3,4\}$ δηλ. 0 άσους.
- Χωρίζουμε τις υπόλοιπες $5^r - 3^r$ ακολουθίες σε ομάδες ως προς τις θέσεις των 2, 3, 4. Π.χ. $x2xx4x32x$, $x \in \{0,1\}$. Σε κάθε ομάδα, οι μισές ακολουθίες έχουν άρτιο αριθμό από 1 και οι άλλες μισές περιττό (βλ. β). Άρα $\frac{1}{2}(5^r - 3^r)$ ακολουθίες με άρτιο $\#(1)$.

$\therefore\ 3^r + \frac{1}{2}(5^r - 3^r) = \frac{1}{2}(5^r + 3^r)$ με άρτιο πλήθος από 1.

Π.χ. $r = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(5+3) = 4$, $r = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}(25+9) = 17$.

Πλήθος υποσυνόλων

Π.χ. Τρόποι επιλογής υποσυνόλων του A, $|A| = r$.

- Παλαιά απόδειξη με επαγωγή ως προς r.
- Εναλλακτικά: Τοποθετήσεις των στοιχείων του A σε 2 κουτιά:
  ΕΝΤΟΣ, ΕΚΤΟΣ $\therefore\ 2^r$.
- Εναλλακτικά: Επιλογή $(s_1, \ldots, s_r) \in S \times \cdots \times S = S^r$ με επανάληψη,
  όπου $S = \{0, 1\}$, $s_i = 1 \Leftrightarrow i \in$ υποσύνολο .

Συνδυασμοί

Μεταθέσεις → Συνδυασμοί

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με μεταθέσεις ή διατάξεις με επανάληψη. Μας ενδιέφερε όχι μόνο ποια αντικείμενα επιλέγουμε αλλά και σε ποια σειρά τα διατάσσουμε αφού τα επιλέξουμε.

Αναγκαία συνθήκη ήταν τα αντικείμενα να είναι διακεκριμένα.

Στους συνδυασμούς μας ενδιαφέρει με πόσους δυνατούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε κάποια αντικείμενα από ένα ευρύτερο σύνολο, χωρίς να μετράμε τις διαφορετικές διατάξεις των επιλεγμένων αντικειμένων.

Συνδυασμοί

r μπάλες ίδιου χρώματος, n αριθμημένα κουτιά, $r \leq n$,
σε κάθε κουτί ≤ 1 μπάλα:

$$\#\text{τοποθετήσεων} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} =: \binom{n}{r} =: C(n,r).$$

διότι $r!$ διατάξεις των μπαλών είναι ίδιες (κανόνας γινομένου).

Ισοδύναμα,

- Επιλέγουμε (χωρίς σειρά) r από n διαφορετικά αντικείμενα.
- r θέσεις χωρίς σειρά, n διαφορετικά αντικείμενα, $r \leq n$, επιλέγουμε ένα αντικείμενο για κάθε θέση.
- Χωρίς σειρά $\Rightarrow$ δεν πρόκειται για επιλογές στο $A \times \cdots \times A$.

Παράδειγμα συνδυασμών

Δίνεται σύνολο με 8 στοιχεία. Πόσα διαφορετικά υποσύνολα με 3 στοιχεία μπορούμε να φτιάξουμε;

Παράδειγμα συνδυασμών

Δίνεται σύνολο με 8 στοιχεία. Πόσα διαφορετικά υποσύνολα με 3 στοιχεία μπορούμε να φτιάξουμε;

$n = 8, r = 3$

$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = 8!/(3!(8-3)!) = 8!/(3!5!) =$
$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots 8)/((1 \cdot 2 \cdot 3)1 \cdot 2 \cdot \ldots 5) = 6 \cdot 7 \cdot 8/(1 \cdot 2 \cdot 3) = 56.$

Συνδυαστικές ταυτότητες

Μια παράσταση της μορφής $\binom{n}{r}$ ονομάζεται διωνυμικός συντελεστής.

- $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{n-r}$ δηλ. $C(n,r) = C(n,n-r)$.
- $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n}{0}$.
- $\binom{n}{r} := 0, \ \forall r > n, \forall r < 0$.

Συνδυαστικές ταυτότητες (συνέχεια)

- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

  Απόδειξη:

  $$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} =$$

  $$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) =$$

  $$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\frac{n}{(n-k)k}$$

Συνδυαστικές ταυτότητες (συνέχεια)

- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

  Απόδειξη:

  $$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} =$$
  $$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) =$$
  $$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\frac{n}{(n-k)k}$$

Δώστε μια εναλλακτική «συνδυαστική» απόδειξη!

Παράδειγμα 3.13

Δυαδικές ακολουθίες μήκους 32 με επτά 1.

- Ακολουθία $\simeq$ τοποθέτηση 7 μπαλών σε 32 αριθμ. κουτιά.

Δηλ. $r = 7, n = 32$, τα άδεια κουτιά αντιστοιχούν σε 0.

$\therefore$ $\#$ακολουθιών $= C(32, 7)$.

- Ισοδύναμα, επιλογή 7 θέσεων για τα 1, από $n = 32$.

Επιλογές υποσυνόλου

Θεώρ. $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Απόδ.

Με επαγωγή στο n. Βήμα:

$$\sum_0^n \binom{n}{k} = 1 + \sum_0^{n-1} \frac{n(n-1)!}{(n-k)(n-k-1)!k!} = 1 + \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{k}\left(1 + \frac{k}{n-k}\right)$$

$$= 1 + 2^{n-1} + \sum_1^{n-1} \frac{(n-1)!k}{(n-k-1)!k!(n-k)} = 1 + 2^{n-1} + \sum_1^{n-1} \binom{n-1}{k-1}$$

$$= 1 + 2^{n-1} + \sum_0^{n-2} \binom{n-1}{k} = 1 + 2^{n-1} + \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{k} - 1 = 2 \cdot 2^{n-1}.$$

$\square$

Επιλογές υποσυνόλου

Θεώρ. $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Απόδ.

Με επαγωγή στο n. Βήμα:

$$\sum_0^n \binom{n}{k} = 1 + \sum_0^{n-1} \frac{n(n-1)!}{(n-k)(n-k-1)!k!} = 1 + \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{k}\left(1 + \frac{k}{n-k}\right)$$

$$= 1 + 2^{n-1} + \sum_1^{n-1} \frac{(n-1)!k}{(n-k-1)!k!(n-k)} = 1 + 2^{n-1} + \sum_1^{n-1} \binom{n-1}{k-1}$$

$$= 1 + 2^{n-1} + \sum_0^{n-2} \binom{n-1}{k} = 1 + 2^{n-1} + \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{k} - 1 = 2 \cdot 2^{n-1}.$$

$\square$

Δώστε εναλλακτική συνδυαστική απόδειξη!

Επιλογές υποσυνόλου

Θεώρ. $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Απόδ. Έστω A σύνολο με n στοιχεία.
Ο αριθμός υποσυνόλων του A με ακριβώς k στοιχεία είναι

$$\binom{n}{k}.$$

Από τον κανόνα του αθροίσματος ο αριθμός όλων των δυνατών υποσυνόλων του A είναι

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Γνωρίζουμε επίσης πως ο αριθμός όλων των υποσυνόλων του A είναι 2^n. $\square$

Διωνυμικό θεώρημα

Θεώρ. $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} \binom{n}{k}$.

Απόδ. Επαγωγικά:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \binom{n-1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} y^{n-1-k} \binom{n-1}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} \binom{n-1}{k} \\
&= x^n \binom{n-1}{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} x^k y^{n-k} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] + y^n \binom{n-1}{0} \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} \binom{n}{k}.
\end{aligned}
$$

Διωνυμικό θεώρημα

Θεώρ. $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} \binom{n}{k}$.

Απόδ. Επαγωγικά: (επίσης με συνδυαστικά επιχειρήματα αν $x, y \in \mathbb{N}$)

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \binom{n-1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} y^{n-1-k} \binom{n-1}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} \binom{n-1}{k} \\
&= x^n \binom{n-1}{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} x^k y^{n-k} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] + y^n \binom{n-1}{0} \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} \binom{n}{k}.
\end{aligned}
$$

Μεταθέσεις - Συνδυασμοί

r χρωματισμένες μπάλες, n αριθμημένα κουτιά, $r \leq n$ και ≤ 1 μπάλα ανά κουτί: #τοποθετήσεων $= P(n,r)$.

Έστω από τις r μπάλες οι q_1 έχουν το ίδιο χρώμα, π.χ. μπλε. Αριθμός τοποθετήσεων:

$$\frac{P(n,r)}{q_1!} = \frac{n!}{q_1!\,(n-r)!}.$$

Άλλες q_2 μπάλες με ίδιο χρώμα, π.χ. κόκκινο. Αριθμός τοποθετήσεων:

$$\frac{P(n,r)}{q_1!q_2!} = \frac{n!}{q_1!q_2!\,(n-r)!}.$$

Μεταθέσεις - Συνδυασμοί

Γενικά, αν από τις r μπάλες

$$q_i \geq 1 \text{ είναι του ίδιου τύπου } \; i, \quad i = 1, \ldots, t,$$

και τις τοποθετήσουμε σε n αριθμημένα κουτιά με το πολύ μία μπάλα στο κάθε κουτί:

$$\#\text{τοποθετήσεων} = \frac{P(n,r)}{q_1! \cdots q_t!}$$

Ορισμός «πολυωνυμικού» συντελεστή

$$\binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_l} = \begin{cases} \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_l!} & \text{αν } \sum_{i=1}^{l} k_i = n \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Με βάση τον ορισμό του «πολυωνυμικού» συντελεστή, μπορούμε να ξαναγράψουμε την προηγούμενη σχέση....

Μεταθέσεις - Συνδυασμοί

Έστω από τις r μπάλες

$$q_i \geq 1 \text{ είναι του ίδιου τύπου } \; i, \quad i = 1, , \ldots, t,$$

$$\text{δηλ. } r \geq \sum_{i=1}^{t} q_i.$$

Θέτουμε $y = \sum_{i=1}^{t} q_i$.

Τοποθετούμε τις μπάλες σε n αριθμημένα κουτιά με το πολύ μία μπάλα στο κάθε κουτί:

$$\#\text{τοποθετήσεων} = \frac{P(n,r)}{q_1! \cdots q_t!} = \binom{n}{q_1, \ldots, q_t, \; \underbrace{1, 1, \ldots, 1,}_{r-y \text{ φορές}} \; n-r}$$

«Πολυωνυμικό» θεώρημα

Θεώρ. $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}: \\ n_1+\cdots+n_k=n}} \binom{n}{n_1, \ldots, n_k} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}.$$

Απόδ. Δεν θα το αποδείξουμε. $\square$

$k = 2 \Rightarrow$ διωνυμικό θεώρημα με $\binom{n}{n_1, n_2} = \binom{n}{n_1}$.

Παραλλαγή παράδ. 3.10

15 γραφεία στον νέο όροφο του κτηρίου Πληροφορικής,
12 βάφονται: 3 πράσινα, 2 ιώδη, 2 κίτρινα, 5 λευκά.
Πόσοι τρόποι βαφής υπάρχουν;

Όσοι κι οι τρόποι τοποθέτησης 12 μπαλών (3 πράσινες κλπ)
σε 15 αριθμημένα κουτιά, άρα

$$\frac{P(15,12)}{3!2!2!5!} = \binom{15}{3,2,2,5,3} = 75.675.600.$$

Π.χ. 4 γραφεία, 2 πράσινα, 1 ιώδες: $\binom{4}{2,1,1} = 12$:
1234 1234, 1234 1234, 1234 1234,
1234 1234, 1234 1234, 1234 1234.

Συνδυασμοί με επανάληψη

Θεώρ. r όμοιες μπάλες, n αριθμημένα κουτιά, $\forall r, n$,

οσεσδήποτε μπάλες ανά κουτί: #τοποθετήσεων $= \binom{n+r-1}{r}$.

Απόδ. Πείραμα: τοποθέτηση $n-1$ διαχωριστικών σε r στοιχεία, δηλ. διαλέγω $n-1$ διαχωριστικά από $n-1+r$ αντικείμενα, άρα $C(n+r-1, n-1) = C(n+r-1, r)$. $\square$

Ισοδύναμα:

- επιλογές r αντικειμένων από n είδη με επανάληψη,
- $|\{x \in \mathbb{Z}^n, x_i \geq 0, \sum_i x_i = r\}| = C(n+r-1, r)$.

Παραδείγματα

Π.χ. Κορώνα ή γράμματα με 3 νομίσματα: $3 = r$, $n = 2$ αποτελέσματα (κουτιά).
#αποτελεσμάτων $= \binom{2+3-1}{1} = 4$: 3Κ, 2Κ-Γ, Κ-2Γ, 3Γ.

Π.χ. 3 ζάρια, #αποτελεσμάτων $= \binom{3+6-1}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$.
ΟΧΙ: 6^3 γιατί $123 \sim 213$ (η σειρά δεν μας αφορά).

Συνδυασμοί με επανάληψη χωρίς κενά

Θεώρ. r όμοιες μπάλες, n αριθμημένα κουτιά, τουλάχιστον 1 μπάλα ανά κουτί $(r \geq n)$:

$$\#\text{τοποθετήσεων} = \binom{r-1}{n-1}$$

Απόδ. y_i μπάλες στο κουτί i, βρες $|\{y \in \mathbb{Z}^n, y_i > 0, \sum_i y_i = r\}|$.
Θέτω $y_i = x_i + 1$, ισοδύναμα, βρες $\#\{x_i\}$.
Όμως $x_i \geq 0, \sum_i x_i = -n + \sum_i y_i = r - n$.
Προηγ. θεώρ. $\Rightarrow \#\{x_i\} = C(n + (r-n) - 1, n-1)$. $\square$

Ισοδύναμα, επιλογές r αντικειμένων από n είδη με επανάληψη, κάθε είδος επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά.

Άσκηση

5 διαφορετικά άτομα σε σειρά 12 καρεκλών (αριθμ.):

1ος Τρόπος: Μεταθέσεις 5 εκ των 12 αντικειμένων, δηλ.,
διατεταγμένες 5-άδες $\in A^5 : |A| = 12$: $P(12,5) = \frac{12!}{7!}$.

2ος Τρόπος: Μεταθέσεις 12 αντικειμένων:
$q_1 = \cdots = q_5 = 1, q_6 = 7$:
$\binom{12}{1,1,1,1,1,7} = \frac{12!}{7!} = 95040$.

3ος Τρόπος: 5! διατάξεις ατόμων: $\sqcup A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4 \sqcup A_5 \sqcup$.
2ο πείραμα: 7 καρέκλες σε 6 κενά, δηλ. 7 όμοιες μπάλες σε 6 αριθμημένα κουτιά, χωρίς περιορισμό ανά κουτί: $C(12,7)$.
Κανόνας Γινομένου $\Rightarrow 5!\, C(12,7) = 5! \frac{12!}{7!5!} = \frac{12!}{7!}$.

4ος Τρόπος: Επιλέγω τις 7 άδειες καρέκλες με $C(12,7)$ τρόπους,
διατάσσω τα άτομα με 5! τρόπους.
Κανόνας Γινομένου $\Rightarrow 5!\, C(12,7)$.

Άσκησης Συνέχεια

- 5 διαφορετικά άτομα σε σειρά 12 καρεκλών (αριθμ.), αλλά να ΜΗΝ υπάρχουν 2 διπλανά άτομα.

5! διατάξεις ατόμων για $A_1KA_2KA_3KA_4KA_5$,
απομένουν 3 καρέκλες: τοποθέτηση 3 καρεκλών σε 6 κενά με $C(8,3)$ τρόπους.
$\therefore\ 5!\frac{8!}{3!5!} = \frac{8!}{3!} = 6720.$

- Επιπλέον, απαιτούμε να υπάρχουν άτομα στις 2 ακραίες καρέκλες:

5! διατάξεις ατόμων για $A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4 \sqcup A_5$,
απομένουν 3 καρέκλες σε 4 κενά με $C(6,3)$ τρόπους.
$\therefore\ 5!\frac{6!}{3!3!} = 2400.$

Σύνοψη

$$\frac{n!}{(n-r)!} = P(n,r),\; r \le n$$

$$n^r,\; \forall\, r, n$$

$$\binom{n}{r} = C(n,r)$$

$$n!/r_1! \cdots r_t!(n-r)!,\; r = r_1 + \cdots + r_t \le n$$

$$C(n+r-1, r),\; \forall\, r, n$$

$$C(r-1, n-1),\; r \ge n.$$

Πρέπει να ξέρουμε σε ποια σενάρια αντιστοιχεί η κάθε μία σχέση. Έχουμε διάταξη ή συνδυασμό; Επιτρέπεται επανάληψη ή όχι των στοιχείων;

Ασκήσεις

Παράδειγμα 3.9

Υπόθ. 1. 7 ημέρες, καθεμιά αντιστοιχεί σε 1 μάθημα,
Υπόθ. 2. 4 μαθήματα, πρέπει να μελετηθούν όλα.

- Πόσα Προγράμματα υπάρχουν;

Λύση: $4^7 - |A_1 \cup \cdots \cup A_4|$, όπου $4^7 = 16384$ και
$A_i := \{\text{Προγράμματα χωρίς μάθημα } i\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

$|A_i| = 3^7$, $|A_i \cap A_j| = 2^7$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1^7 = 1$.
$|A_1 \cap \cdots \cap A_4| = 0$, από Υπόθ. 1.

Εγκλεισμός / Αποκλεισμός:
$|A_1 \cup \cdots \cup A_4| = 4 \cdot 3^7 - \binom{4}{2} \cdot 2^7 + \binom{4}{3} \cdot 1 - 0 = 7.984.$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 16384 - 7.984 = 8400

Αρχή εγκλεισμού/αποκλεισμού

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup \cdots \cup A_n| &= |A_1| + \cdots + |A_n| \\
&\quad -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
&\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots \\
&\quad \vdots \\
&\quad -(-1)^k \textstyle\sum_{J \in 2^{[n]} \wedge |J|=k} |\bigcap_{j \in J} A_j| \\
&\quad -(-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n| = \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|
\end{aligned}
$$

Σημειώστε πως $J \subseteq [n] := \{1, \ldots, n\}$ & $|J| = k$.

Παράδειγμα 3.9

Υπόθ. 1. 7 ημέρες, καθεμιά αντιστοιχεί σε 1 μάθημα,
Υπόθ. 2. 4 μαθήματα, πρέπει να μελετηθούν όλα.

- Πόσα Προγράμματα υπάρχουν;

Άλλη απόπειρα:
1. Διάλεξε τέσσερεις από τις επτά μέρες για να προγραμματίσεις τέσσερα μαθήματα. $P(7,4)$ τρόποι.
2. Διάλεξε τρία μαθήματα για τις υπόλοιπες τρεις μέρες. 4^3 τρόποι.

Άρα συνολικά $P(7,4)4^3 = 53.760$ τρόποι;
ΛΑΘΟΣ!! τα $1234\mu\mu\mu$ και $1\mu\mu\mu234$ περιλαμβάνουν αμφότερα το 1234234.

Κανόνας του Γινομένου και Παράδειγμα 3.9

Ο κανόνας του γινομένου αναφέρεται σε δύο πειράματα όπου κάθε δυνατός συνδυασμός των αποτελεσμάτων τους είναι διακεκριμένος (ξεχωριστός).

Μετρώντας λοιπόν κάθε τέτοιο συνδυασμό δεν μετράμε παραπάνω από όσο πρέπει.

Κανόνας του Γινομένου και Παράδειγμα 3.9

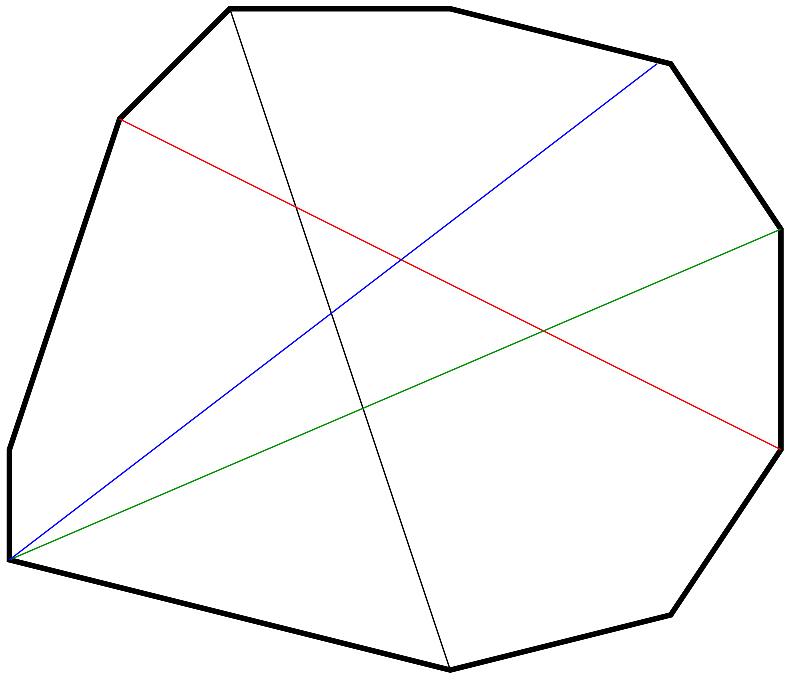
Εναλλακτική διατύπωση του Κανόνα του Γινομένου: Έστω m σύνολα αμοιβαία ξένα μεταξύ τους (πείραμα 1) όπου το καθένα έχει n στοιχεία (πείραμα 2). Η ένωση των m συνόλων έχει nm στοιχεία.

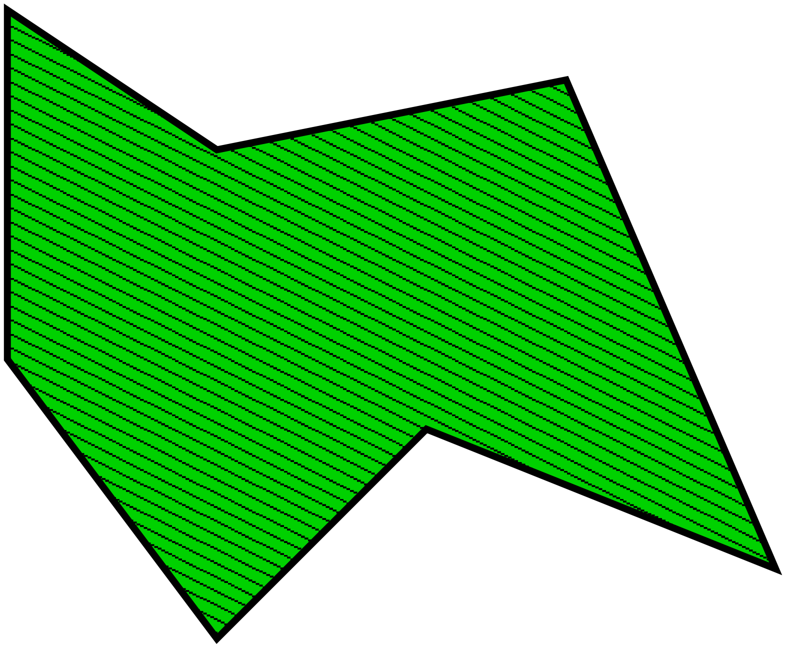
Πείραμα 1. Διάλεξε τέσσερεις από τις επτά μέρες για να προγραμματίσεις τέσσερα μαθήματα. $P(7,4)$ τρόποι.
Πείραμα 2. Διάλεξε τρία μαθήματα για τις υπόλοιπες τρεις μέρες. 4^3 τρόποι.

Από το Πείραμα 1 προκύπτουν $P(7,4)$ σύνολα προγραμμάτων. Το καθένα από αυτά έχει όντως 4^3 στοιχεία. Όμως τα σύνολα αυτά δεν είναι ξένα.
Τα $1234\mu\mu\mu$ και $1\mu\mu\mu234$ περιλαμβάνουν αμφότερα το 1234234.

Κυρτότητα

Ορ. Ένα αντικείμενο I λέγεται κυρτό αν κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει 2 σημεία του I κείται ολόκληρο στο εσωτερικό του αντικειμένου.

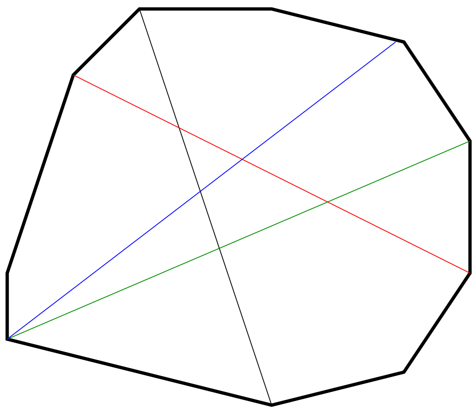




Κυρτό Μη-κυρτό

Παράδειγμα 3.15

- Κυρτό 10-γωνο στο επίπεδο (π.χ. κανονικό 10-γωνο),
- διαγώνιοι σε "γενική θέση" δηλ. $\forall$ τριάδα ΔΕΝ τέμνεται
- Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται πάνω στις διαγωνίους;



$\binom{10}{2}$ τμήματα μεταξύ 2 κορυφών $= 45$
$-$(10 ακμές) $=$ 35 διαγώνιοι.

Υπολογίζουμε πρώτα το συνολικό αριθμό εσωτερικών σημείων τομής των διαγωνίων.
(ζεύγη διαγωνίων που τέμνονται σε κορυφή δεν ορίζουν τομή).
Σε κάθε τετράδα κορυφών αντιστοιχίζεται ένα διαφορετικό σημείο τομής και αντιστρόφως (γιατί;).
$\binom{10}{4} = 210$ τομές.

Παράδειγμα 3.15 (συνέχεια)

Συνολικά 210 τομές σε 35 διαγώνιους.

k_i τομές στην i-οστή διαγώνιο ορίζουν $k_i + 1$ τμήματα, $k_i \neq$σταθ.

$$\text{αριθμός τμημάτων} = \sum_{i=1}^{35}(k_i + 1) = \sum_{i=1}^{35} k_i + 35 = 2 \cdot 210 + 35 = 420 + 35 = 455.$$

(κάθε σημείο τομής ανήκει σε 2 ακριβώς διαγωνίους)

Άσκηση 3.42

Με πόσους τρόπους τοποθετούνται k κόκκινες και l λευκές μπάλες σε n αριθμημένα κουτιά, ώστε κάθε κουτί να περιέχει τουλάχιστον μια κόκκινη και μια λευκή μπάλα;

- Υποθέτουμε πως $k \geq n$, $l \geq n$, αλλιώς η απάντηση είναι 0.
- Με 1 τρόπο τοποθετώ n κόκκινες και n λευκές μπάλες.
- Απομένουν $k-n$ κόκκινες και $l-n$ λευκές μπάλες, που

τοποθετούνται αυθαίρετα, άρα το πλήθος τοποθετήσεων είναι

$$\binom{n+(k-n)-1}{k-n}\binom{n+(l-n)-1}{l-n} = \binom{k-1}{k-n}\binom{l-1}{l-n}$$

Ισοδύναμα: τοποθετούνται k κόκκινες μπάλες στα n κουτιά με ≥ 1 μπάλα ανά κουτί και ομοίως οι λευκές. Κανόνας γινομένου:

$$\binom{k-1}{n-1}\binom{l-1}{n-1}$$

Άσκηση 3.47

(α) r διαφορετικές μπάλες τοποθετούνται σε n διαφορετικά κουτιά. Σε κάθε κουτί, οι μπάλες βρίσκονται σε μια σειρά. Πόσοι τρόποι υπάρχουν;

Όταν έχουμε τοποθετήσει k μπάλες υπάρχουν $n+k$ τρόποι να τοποθετήσουμε την επόμενη, άρα

$$n(n+1)\cdots(n+r-2)(n+r-1).$$

(β) Με πόσους τρόπους διατάσσονται τα 8 γράμματα a, b, c, d, e, f, g, h ώστε το a να βρίσκεται αριστερά του b και το b αριστερά του c;

Η διάταξη $-a-b-c-$ ορίζει $n=4$ κουτιά όπου τοποθετούμε, διατεταγμένα, τα υπόλοιπα $r=5$ γράμματα. Από το (α) έχουμε $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$.

Δημιουργία Μεταθέσεων και Συνδυασμών

[**Liu**, ενότ. 3.5*]

Δημιουργία Μεταθέσεων

Συστηματική δημιουργία $N!$ μεταθέσεων.
Κλειδί: η οργάνωση και ταξινόμηση/διάταξη των μεταθέσεων.

Ορ. Λεξικογραφική ταξινόμηση/διάταξη:
$a = (a_1, \ldots, a_N) \prec b = (b_1, \ldots, b_N) \Leftrightarrow$
$a_1 = b_1, \ldots, a_{M-1} = b_{M-1}, a_M < b_M,\ 1 \leq M \leq N.$
$\exists M < N \Leftarrow a \neq b.$

Π.χ. $a, b \in$ Μεταθέσεις $(1, 2, \ldots, 5)$. Τότε
$12345 \prec \cdots \prec 43512 \prec 43521 \prec 45123 \prec \cdots \prec 54321.$

Βασικό πλαίσιο

Έστω μετάθεση $a \in \mathbb{N}^n$, και η αμέσως επόμενη b

$$a = xxxyyyy \quad b = xxxy'y'y'y'$$

έτσι ώστε $yyyy \neq y'y'y'y$.

Όρισε σαν στοιχείο οδηγό μέσα στο a τον επόμενο χαρακτήρα μετά το κοινό πρόθεμα. Δηλ. $a = xxxyyyy$.

Το $y'y'y'y'$ ορίζεται ως η αμέσως επόμενη μετάθεση του $yyyy$ στη λεξικογραφική διάταξη.

Δοσμένης μιας μετάθεσης $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ αρκεί να βρούμε το στοιχείο-οδηγό a_m, $m < n$. Το Λήμμα 2 περιγράφει τις ιδιότητες του m.

Ιδέα για το στοιχείο οδηγό

Δεδομένης μετάθεσης $a \in \mathbb{N}^n$, η αμέσως επόμενη b πρέπει να έχει όσο το δυνατό μεγαλύτερο κοινό πρόθεμα xxx με την a.

$$a = xxxyyyy \quad b = xxxy'y'y'y'$$

Για την κατάληξη $yyyy$ να πρέπει να υπάρχει επόμενη ακολουθία στη λεξικογραφική διάταξη.

Λήμμ. 1 Για κάθε $N \in \mathbb{N}^*$,
$\min = (1, 2, \ldots, N) \prec \cdots \prec (N, \ldots, 1) = \max.$

Μια γνησίως φθίνουσα (υπ)ακολουθία δεν έχει επόμενη μεγαλύτερη στη λεξικογραφική διάταξη.

Π.χ. η 653 είναι η μεγαλύτερη δυνατή ακολουθία που μπορεί να φτιαχτεί από τα στοιχεία $3, 5, 6$.

Λεξικογραφική Δημιουργία Μεταθέσεων

Λήμμ. 2 Δεδομένης μετάθεσης $a \in \mathbb{N}^n$, έστω μετάθεση b τ.ω:
1. $a_1 = b_1, \ldots, a_{m-1} = b_{m-1}, a_m < b_m :\ m$ μέγιστο δυνατό,
2. $b_m := \min\{a_{m+1}, \ldots, a_n\} : b_m > a_m$ και 3. $b_{m+1} < \cdots < b_n$.
Τότε η b είναι η αμέσως επόμενη μετάθεση της a λεξικογραφικά.

Απόδ. (1) $\Rightarrow a \prec b$ λεξικογραφικά· θα δείξουμε το «αμέσως».

Έστω $c : a \prec c \prec b :$
$$\begin{aligned} a &= (a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n), \\ c &= (a_1, \ldots, a_{m-1}, c_m, c_{m+1}, \ldots, c_n), \\ b &= (a_1, \ldots, a_{m-1}, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

Περίπτωση 1 $c_m = a_m$
$\Rightarrow (c_{m+1}, \ldots, c_n) \succ (a_{m+1}, \ldots, a_n) \Rightarrow \exists k > m : a_k < c_k$.
Θεωρείστε το ελάχιστο τέτοιο k. Πληροί τη Συνθήκη (1), δηλ. θα μπορούσαμε να διαλέξουμε $a_1 = b_1, \ldots, a_m = b_m = c_m, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1} = c_{k-1}, a_k < b_k$. Άτοπο γιατί το m της Συνθήκης (1) υποτίθεται πως είναι το μέγιστο δυνατό.

Απόδειξη Λήμματος (συνέχεια)

Έστω $c : a \prec c \prec b :$
$$\begin{aligned} a &= (a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n), \\ c &= (a_1, \ldots, a_{m-1}, c_m, c_{m+1}, \ldots, c_n), \\ b &= (a_1, \ldots, a_{m-1}, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

Περίπτωση 2 $c_m > a_m$

$\Rightarrow c_m \in \{a_{m+1}, \ldots, a_n\} : c_m > a_m \Rightarrow^{(2)} c_m \geq b_m$.

$b_m \geq c_m \Rightarrow b_m = c_m \Rightarrow (b_{m+1}, \ldots, b_n) \succ (c_{m+1}, \ldots, c_n)$.

Βεβαιωθείτε πως οι $(b_{m+1}, \ldots, b_n)$ και $(c_{m+1}, \ldots, c_n)$ συντίθενται από τα ίδια στοιχεία, συγκεκριμένα το ίδιο υποσύνολο του $\{a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n\}$. Τότε λόγω του (3) πρέπει $(b_{m+1}, \ldots, b_n) \prec (c_{m+1}, \ldots, c_n)$, άτοπο.

$\boxed{\text{ΟΕΔ}}$

Τί μας δείχνει το Λήμμα 2

Λήμμ. 2 Δεδομένης μετάθεσης $a \in \mathbb{N}^n$, η αμέσως επόμενη b είναι τ.ω.:

1. $a_1 = b_1, \ldots, a_{m-1} = b_{m-1}, a_m < b_m$: m μέγιστο δυνατό,
2. $b_m := \min\{a_{m+1}, \ldots, a_n\} : b_m > a_m$,
3. $b_{m+1} < \cdots < b_n$.

Το Λήμμα 2 λέει πως το m πρέπει να είναι το μέγιστο δυνατό ώστε η $(a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n)$ να μπορεί να αυξηθεί λεξικογραφικά. Δηλ. το m να είναι το μέγιστο δυνατό ώστε να υπάρχει $k > m$ τ.ω. $a_m < a_k$.

Για κάθε πιθανό m δεν χρειάζεται να ελέγξουμε όλα τα a_k με $k > m$. Μπορούμε να κάνουμε ένα τοπικό τεστ. Βλέπε Λήμμα 3.

Δημιουργία επόμενης μετάθεσης

Λήμμ. 3 Το m του προηγ. λήμματος είναι τ.ώ.
m max : $\exists k > m : a_m < a_k \Leftrightarrow \max m : a_m < a_{m+1}$.

Απόδ. Γενικά, για πρόταση $[\max m : A \Leftrightarrow \max m : B]$, αρκεί να δείξουμε: $[\max m : A \Rightarrow B], [\max m : B \Rightarrow A]$.

$[\Rightarrow]$ Δηλ. αποδεικνύουμε πως «για m max : $\exists k > m : a_m < a_k$ ισχύει $a_m < a_{m+1}$. »
Έστω πως όχι, δηλ. $a_m \geq a_{m+1} \Rightarrow a_k > a_{m+1} \Rightarrow m$ όχι max $\downarrow$

$[\Leftarrow]$ Υπάρχει $k > m : a_m < a_k$, και αυτό είναι το $k := m+1$.

$\square$

Δεν ισχύει πως $a_m < \min\{a_{m+1}, \ldots, a_n\}$.
Αντι-π.χ. $NXT(4\underline{35}21) = 45123$.

Αλγόριθμος Δημιουργίας Μεταθέσεων

```
/* input: a[1]...a[n] */
for (m=n; m>=1; m--)
     { if (a[m]<a[m+1]) break; }
s = Sort(a[m]...a[n]);     /* increasing */
for (k=1;k<=n-m+1;k++)
     { if (s[k]>a[m]) break; }
a[m] = s[k];
j = 0;
for (i=1;i<=n-m+1;i++)
    { if (i==k) j=1; a[m+i] = s[i+j]; }
```

Π.χ. Δοκιμάστε τον αλγόριθμο στην είσοδο $1, 2, 7, 4, 6, 5, 3$. Πρέπει να πάρετε έξοδο $1, 2, 7, 5, 3, 4, 6$.

Ανάλυση Αλγορίθμου

```
/* input: a[1]...a[n] */
for (m=n; m>=1; m--)
     { if (a[m]<a[m+1]) break; }
s = Sort(a[m]...a[n]);    /* increasing */
for (k=1;k<=n-m+1;k++)
     { if (s[k]>a[m]) break; }
a[m] = s[k];
j = 0;
for (i=1;i<=n-m+1;i++)
    { if (i==k) j=1; a[m+i] = s[i+j]; }
```

- υπολογισμός του m σε $O(n)$, **Sort** $= O(n \log n)$,
- υπολογισμός του k σε $O(n)$, τελευταίο στάδιο $= O(n)$
- άρα επόμενη μετάθεση $O(n \log n)$, σύνολο $O(n! \cdot n \log n)$.

Ταχύτερος Αλγόριθμος Μεταθέσεων

```
/* input: a[1]...a[n] */
for (m=n; m>=1; m--) { if (a[m]<a[m+1]) break;
s = copy(a[m+1]..a[n]);
for (i=m+2;i<=n;i++) { if (a[i]<a[m]) break; }
k = i-1;
s[k-m] = a[m]; /* s[1]..s[n-m] decreasing */
a[m] = a[k];
for (i=0;i<n-m;i++) { a[m+i+1] = s[n-i-m]; }
```

Π.χ. $NEXT(435\underline{12}) = (435x\overline{x} : x = 2 = \min\{2\} > 1) = 43521$.
$NEXT(4\underline{35}21) = (4x\overline{xxx} : x = \min\{5, 2, 1\} > 3) = 45123$.

- υπολογισμός επόμενης μετάθεσης σε $O(n)$, σύνολο $O(n! \cdot n)$.

Δημιουργία Συνδυασμών

Ορ. $\binom{n}{k}$ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ: υποσύνολα τ.ώ. $|$υποσύνολο$| = k$.

- Θα διατάξουμε τα στοιχεία κάθε υποσυνόλου σε αύξουσα σειρά, ώστε να υπάρχει μοναδικός τρόπος γραφής του.
- Τα υποσύνολα θα παραχθούν σε λεξικογραφική διάταξη.

Π.χ. Σύνολο $= \{a, b, c\}$ $(n = 3), k = 2$.
Πλήθος $= \binom{3}{2} = 3$ υποσύνολα.
Λεξικογραφικά: $\{a, b\} \prec \{a, c\} \prec \{b, c\}$.

Π.χ. Γενικά, $\{1, \ldots, k\} \prec \cdots \prec \{n - k + 1, \ldots, n\}$.

Ιδιότητες συνδυασμών

Λήμμ. Στην ακολουθία $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ισχύει για κάθε $j \leq k \leq n$, πως η μέγιστη τιμή του a_j είναι $n - k + j$.

Απόδ. Θυμηθείτε πως η ακολουθία μας είναι πάντα σε αύξουσα διάταξη. Η μέγιστη τιμή του a_k είναι n, η μέγιστη τιμή του a_{k-1} είναι $n - 1$ (γιατί;), ..., η μέγιστη τιμή του a_{k-i} είναι $n - i$. Θέτω $k - i = j$. $\square$

Π.χ. Γενικά, $\{1, \ldots, k\} \prec \cdots \prec \{n-k+1, \ldots, n\}$.

Βασική ιδέα

Ίδια με αυτή της παραγωγής μεταθέσεων: δεδομένης μια ακολουθίας $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (που αντιστοιχεί σε ένα συνδυασμό), βρες τη μικρότερη δυνατή υπακολουθία-κατάληξη που μπορεί να «αυξηθεί» (κατά τη λεξικογραφική διάταξη).

Κατά την «αύξηση» όμως πρέπει να λάβουμε υπόψη πως δεν μας ενδιαφέρουν οι μεταθέσεις αλλά οι συνδυασμοί.

Η υπακολουθία αυτή αντιστοιχεί στις θέσεις $m+1, m+2, \ldots, k$ όπως ορίζονται στην επόμενη διαφάνεια.

Επόμενος συνδυασμός

Λήμμ. $k \le n$, $NEXT(a_1, \ldots, a_k) = (b_1, \ldots, b_k)$:

1. $a_1 = b_1, \ldots, a_{m-1} = b_{m-1}$, $a_m < b_m$: m max,
2. $b_m = 1 + a_m$,
3. $b_j = 1 + b_{j-1}, \quad \forall j \ge m+1$.

Π.χ. $NEXT\{a, c\} = \{b, c\} \quad : m = 1$.

Απόδ. Προφανώς $a \prec b$.

$$a = (a_1 < \cdots < a_{m-1} < a_m < a_{m+1} < \cdots < a_k),$$
$$b = (a_1 < \cdots < a_{m-1} < 1 + a_m < b_{m+1} < \cdots < b_k).$$

$\square$

$\therefore$ (1) ικανοποιείται για max $m : a_m < n - k + m$.

Αλγόριθμος δημιουργίας

1. $a_1 = b_1, \ldots, a_{m-1} = b_{m-1},\ a_m < b_m :\ m$ max:
   Εξέτασε $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1$, έως μέγιστο $m : a_m < n - k + m$.
2. $b_m = 1 + a_m$,
3. $b_j = 1 + b_{j-1}, \quad \forall j \geq m + 1$.

```
/* input: a[1]...a[k]; output: b[1]...b[k] */
for (m=k; m>=1; m--) { if (a[m]<n-k+m) break; }
b[m] = 1 + a[m];
for (j=m+1; j<=k; j++) { b[j] = 1 + b[j-1]; }
```

Συνολική πολυπλοκότητα $= O(k)$.

Πολυπλοκότητα δημιουργίας όλων των συνδυασμών $= O(\binom{n}{k} k)$.