

Μαθηματικά Πληροφορικής

7ο Μάθημα

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ταιριάσματα (matchings)

Ορισμός (Ταίριασμα)

Έστω γράφημα $G = (V, E)$. **Ταίριασμα** καλείται ένα σύνολο $M \subseteq E$, τέτοιο ώστε κάθε κορυφή του V ανήκει το πολύ σε μία ακμή του M . Το **μέγεθος** του ταιριάσματος είναι το $|M|$.

Ένα ταίριασμα M καλείται **ταίριασμα του $U \subseteq V$** , αν σε κάθε κορυφή του U προσπίπτει μία ακμή του M . **Ταίρι** του $u \in U$ καλείται η **μοναδική** κορυφή $v \in U$ για την οποία $\{u, v\} \in M$. Μια κορυφή χωρίς ταίρι, καλείται **αταίριαστη**.

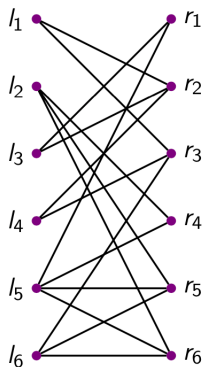
Ένα ταίριασμα του V καλείται **πλήρες ή τέλειο** (perfect matching). Δεν έχουν όλα τα γραφήματα πλήρες ταίριασμα.

Ορισμός (Διμερές γράφημα)

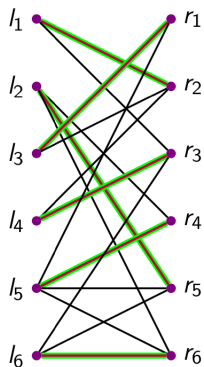
Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται **διμερές** αν $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, και για κάθε $\{u, v\} \in E$, $u \in A, v \in B$.

Ένα διμερές γράφημα $G = (V, E)$ με διαμέριση $\{A, B\}$ θα το συμβολίζουμε ως $G = (A \cup B, E)$.

Ταιριάσματα σε διμερή γραφήματα



(a)



(b)

Σχήμα: Διμερές γράφημα (a) και ένα πλήρες ταίριασμα (b)

Θεώρημα του Hall

Για $S \subseteq V$, συμβολίζουμε με $N(S)$ το σύνολο των γειτόνων του S .

Θεώρημα (Hall)

Ένα διμερές γράφημα $G = (L \cup R, E)$ με ίσο αριθμό κόμβων στα δυο μέρη L και R , περιέχει **τέλειο ταίριασμα** αν και μόνο αν για κάθε υποσύνολο S του L

$$|S| \leq |N(S)|.$$

Θεώρημα του Hall

Για $S \subseteq V$, συμβολίζουμε με $N(S)$ το σύνολο των γειτόνων του S .

Θεώρημα (Hall)

Ένα διμερές γράφημα $G = (L \cup R, E)$ με ίσο αριθμό κόμβων στα δυο μέρη L και R , περιέχει **τέλειο ταίριασμα** αν και μόνο αν για κάθε υποσύνολο S του L

$$|S| \leq |N(S)|.$$

Απόδειξη (\Rightarrow)

Η συνθήκη του Hall είναι ξεκάθαρα **αναγκαία**. Αν υπάρχει ταίριασμα M του L , τότε πράγματι για κάθε υποσύνολο S του L

$$|S| \leq |N(S)|.$$

Τα ταίρια των κορυφών του S στο M είναι ακριβώς $|S|$ το πλήθος και ανήκουν στο $N(S)$.

Απόδειξη του Θεωρήματος του Hall (\Leftarrow)

Απομένει να δείξουμε ότι η συνθήκη του Hall είναι και **ικανή**.

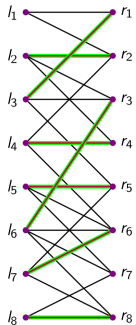
Ορισμός

Έστω M ταίριασμα. **M -εναλλασσόμενο μονοπάτι** ονομάζεται ένα μονοπάτι P του οποίου οι ακμές ανήκουν εναλλάξ στο $E \setminus M$ και το M . **M -αυξητικό μονοπάτι** ονομάζεται ένα εναλλασσόμενο μονοπάτι που ξεκινάει και τελειώνει σε αταίριαστη κορυφή.

Αν υπάρχει M -αυξητικό μονοπάτι P , **τότε** το σύνολο ακμών $M' = M \oplus E(P) = (M - E(P)) \cup (E(P) - M)$ (i) είναι ταίριασμα και (ii) $|M'| = |M| + 1$.

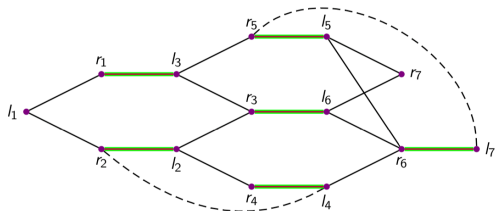
Θα αποδείξουμε **κατασκευαστικά** πως αν ισχύει η συνθήκη και έχουμε μερικό ταίριασμα του L , μπορούμε πάντα να βρούμε αυξητικό μονοπάτι ξεκινώντας από αταίριαστη κορυφή $u \in L$.

Απόδειξη του Θεωρήματος του Hall (\Leftarrow)

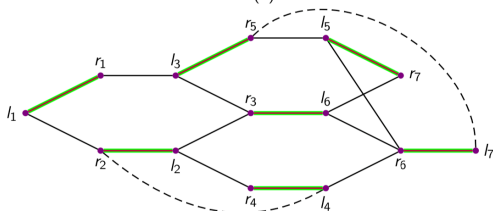


Σχήμα: Ένα μερικό ταιρίασμα

Απόδειξη του Θεωρήματος του Hall (\Leftarrow)



(a)



(b)

Σχήμα: (a) Ξεδιπλώνουμε το γράφημα από το l_1 . (b) Παίρνουμε ένα καλύτερο ταίριασμα εναλλάσσοντας τις ακμές στο μονοπάτι $(l_1, r_1, l_3, r_5, l_5, r_7)$.

Απόδειξη του Θεωρήματος του Hall (\Leftarrow)

Για $S \subseteq R$,

$$M(S) := \{u \in L \mid \exists v \in S \{u, v\} \in M\}.$$

Δηλ. $M(S)$ είναι τα **ταίρια** των κορυφών του S .

- Δίνουμε αλγόριθμο που ξεκινώντας από **αταίριαστη** κορυφή $u \in L$ ψάχνει για αυξητικό μονοπάτι.
- Ο αλγόριθμος επισκέπτεται τις κορυφές ανά «επίπεδα» όπου διαδοχικά επίπεδα αντιστοιχούν σε διαφορετικές μεριές του G , δηλ. στο L και στο R .

$$L_0, R_1, L_1, R_2, L_2, \dots$$

- Αρχικά $L_0 = \{u\}$ και $R_1 = N(L_0)$. Μετά $L_1 = M(R_1)$, $R_2 = N(L_2)$ κοκ.

Αλγόριθμος για αυξητικό μονοπάτι

```
1  $L_0 := \{u\}$  //  $u \notin M(R)$ , δηλαδή αταίριαστη
2  $R_1 := N(L_0)$ 
3  $SeenL := L_0$   $SeenR := R_1$ 
4  $i := 1$ 
5 while ( όλες οι κορυφές του  $R_i$  ταιριασμένες and  $R_i \neq \emptyset$  )
   do
6    $L_i := M(R_i)$ 
7    $R_{i+1} := N(L_i) \setminus SeenR$ 
8    $SeenL := SeenL \cup L_i$ 
9    $SeenR := SeenR \cup R_{i+1}$ 
10   $i := i + 1$ 
11 end
12 if υπάρχει αταίριαστη κορυφή στο  $R_i$  then
13   return «βρέθηκε αυξητικό μονοπάτι»
14 end
```

Αλγόριθμος για αυξητικό μονοπάτι

Από τη Γραμμή 6 του Αλγορίθμου,

$$\forall i, |R_i| = |L_i|. \quad (1)$$

Αν το while-loop τερματίσει και **δεν** έχουμε βρει αυξητικό μονοπάτι, το «τελευταίο» $R_{i+1} = \emptyset$ και το «ξεδίπλωμα» του γραφήματος σταματάει σε κορυφές του L .

Άρα

$$|\text{SeenR}| = \sum_{i=1} |R_i| \stackrel{(1)}{=} \sum_{i=1} |L_i| = |\text{SeenL}| - 1$$

γιατί $\text{SeenL} = \{u\} \cup (\bigcup_{i=1} L_i)$.

Εκ κατασκευής $\text{SeenR} = N(\text{SeenL})$. Από συνθήκη Hall, θα έπρεπε $|\text{SeenR}| \geq |\text{SeenL}|$, **άτοπο**.

Θεώρημα του Hall

Στην πραγματικότητα αποδείξαμε κάτι πιο γενικό:

Θεώρημα (Hall)

Ένα διμερές γράφημα $G = (L \cup R, E)$ περιέχει *ταίριασμα του L* αν και μόνο αν για κάθε υποσύνολο S του L

$$|S| \leq |N(S)|.$$

Πόρισμα του Θεωρήματος του Hall

Πόρισμα (Πόρισμα του Θ. του Hall)

Αν σε διμερές $G = (L \cup R, E)$ για κάθε $S \subseteq L$, $|S| - d \leq |N(S)|$, για κάποιο $d \in \{0, 1, \dots, |L|\}$, τότε το G περιέχει ταίριασμα μεγέθους $|L| - d$.

Απόδειξη.

Κατασκευάζουμε G' όπου στη μεριά του R προσθέτουμε d καινούργιες κορυφές, η κάθε μία συνδέεται με ακμή με όλες τις κορυφές του L . Στο G' , $\forall S \subseteq L$, $|S| \leq |N(S)|$, άρα υπάρχει ταίριασμα M του L .

Το πολύ d από τις $|L|$ το πλήθος ακμές του M προσπίπτουν στις νέες κορυφές. Άρα, τουλάχιστον $|L| - d$ από τις ακμές του M είναι ακμές του G . □