Πανεπιστημιο Αθηνων, Υπολογιστικη Πολυπλοκοτητα
Πρωτο Συνολο Ασκησεων, εαρινο εξαμηνο 2010-2011
Δημοσιευση: 11 Μαρτιου 2011
Παραδοση: 04 Απριλιου 2011, ωρα 15:00

Η ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΚΑΙ Η ΩΡΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΕΣ.

Είναι χρήσιμο να συζητάτε μεταξύ σας τα προβλήματα. Το γράψιμο των απαντήσεων πρέπει να είναι αυστηρά ατομική υπόθεση.

Πρόβλημα 0 [0 μονάδες, μέχρι −2 για λάθος απαντήσεις]. Ορίζουμε τις εξής γλώσσες: PRIMES $= \{x \in (0 \cup 1)\{0,1\}^* \mid x$ αναπαριστά πρώτο αριθμό στο δυαδικό σύστημα$\}$, και COMPOSITES $= \{x \in (0 \cup 1)\{0,1\}^* \mid x$ αναπαριστά σύνθετο αριθμό στο δυαδικό σύστημα$\}$. Δίνεται ο ακόλουθος μη ντετερμινιστικός αλγόριθμος.
1. Αν $x = 1$, επέστρεψε «ο x δεν είναι πρώτος».
2. Διάλεξε μη ντετερμινιστικά ένα φυσικό d ανάμεσα στο 2 και στο $x - 1$.
3. Αν ο d διαιρεί τον x, επέστρεψε «ο x δεν είναι πρώτος» ειδάλλως επέστρεψε «ο x είναι πρώτος».

Μπορούμε εξαιτίας αυτού του αλγορίθμου να αποφανθούμε ότι PRIMES $\in \mathcal{NP}$ ή COMPOSITES $\in \mathcal{NP}$; Διατυπώστε με ακρίβεια την εκτίμηση σας για το χρόνο εκτέλεσης των βημάτων του αλγορίθμου.

Πρόβλημα 1 [3 μονάδες]. Δώστε μια ντετερμινιστική Μ. Τ. μιας ταινίας, με την καλύτερη πολυπλοκότητα χρόνου που μπορείτε, που να αποφασίζει τη γλώσσα $\{a^{2^j} \mid j \geq 0\}$. Περιγράψτε τη λειτουργία της μηχανής μόνο με λόγια.

Πρόβλημα 2 [4 μονάδες]. Είναι η ακόλουθη γλώσσα αναδρομική;

$$\{\ll M \gg \mid \text{ για κάποια συμβολοσειρά εισόδου η ντετερμινιστική Μ. Τ. } M \text{ τρέχει για τουλάχιστον } |\ll M \gg| \text{ βήματα } \}.$$

Με $\ll M \gg$ παριστάνουμε τη συμβολοσειρά που περιγράφει τη Μ. Τ. M. Δείτε, π.χ., σελ. 57–58 του Παπαδημητρίου για το πως μπορούμε να ορίσουμε τους συντακτικούς κανόνες μιας τέτοιας περιγραφής.

Πρόβλημα 3 [4 μονάδες]. Δείξτε ότι $\mathcal{NP} \neq SPACE(n)$ (Πρόβλημα 7.4.7 από τον Παπαδημητρίου).

Πρόβλημα 4 [5 μονάδες]. Αποδείξτε πως δεν υπάρχει κλάση πολυπλοκότητας $\mathcal{C}$ που να περιέχει όλες τις αναδρομικές γλώσσες.

Για τους σκοπούς αυτής της άσκησης μια κλάση πολυπλοκότητας $\mathcal{C}$ ορίζεται από (i) ένα μέτρο πολυπλοκότητας Φ που υπακούει στα αξιώματα του Blum (βλ. Πρόβλημα 7.4.12 του Παπαδημητρίου) και (ii) από μια ολική αναδρομική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοια ώστε η $\mathcal{C}$ να περιέχει ακριβώς τις γλώσσες L με την ιδιότητα: υπάρχει Μ. Τ. M που αποφασίζει την L και για κάθε συμβολοσειρά x, $\Phi(M, x) \leq f(|x|)$.

Επειδή δεν ορίζουμε ποιο είναι το μέτρο πολυπλοκότητας, μπορεί να μην είναι ούτε χρόνος, ούτε χώρος. Ένα παράδειγμα τέτοιου μέτρου πολυπλοκότητας είναι το *μελάνι* που καταναλώνει η μηχανή: ο αριθμός των φορών που η Μ. Τ. εκτελεί μια μετάβαση της μορφής $\delta(q, \sigma) = (p, \sigma', X)$ όπου $p, q \in K$, $X \in \{-, \leftarrow, \rightarrow\}$, $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ και $\sigma \neq \sigma'$.

Πρόβλημα 5 [8 μονάδες]. (α) *Κανονικές* λέγονται οι γλώσσες που γίνονται δεκτές από ένα πεπερασμένο αυτόματο. (Δείτε σχετικά και το πρόβλημα 2.8.11 του Παπαδημητρίου). Θεωρείστε γνωστό πως $SPACE(0) = REG$, δηλ. οι Μ. Τ. που δεν χρησιμοποιούν καθόλου χώρο εργασίας αποφασίζουν ακριβώς τις κανονικές γλώσσες. Δείξτε πως $SPACE(O(1)) = REG$.

(β) Θεωρείστε τη γλώσσα

$$B = \{\$b_k(0)\$b_k(1)\$b_k(2)\$\ldots\$b_k(2^k-1)\$ \mid k \geq 0\} \subseteq \{0,1,\$\}^*,$$

όπου $b_k(i)$ παριστάνει τη δυαδική αναπαράσταση του αριθμού i με ακριβώς k bits. Δείξτε ότι $B \in SPACE(\log\log n)$. *Προσοχή:* το φράγμα στην πολυπλοκότητα χώρου πρέπει να ισχύει και για εισόδους, οποιαδήποτε μορφής, ακόμα κι αυτές που *δεν* ανήκουν στην B.

Παρατηρείστε πως από το (α) και (β) προκύπτει ότι $REG \subset SPACE(\log\log n)$.

Πρόβλημα 6 [10 μονάδες]. (α) Αναζητείστε το βιβλίο J. E. Hopcroft, J. D. Ullman. Formal languages and their relation to automata, Addison-Wesley 1969. Είναι διαθέσιμο ελεύθερα στο διαδίκτυο σε μορφή pdf. Διαβάστε το Κεφάλαιο 10, περιέχει αρκετά θεωρήματα που έχουμε κάνει στην τάξη. Δώστε έμφαση στην τεχνική των crossing sequences για την απόδειξη κάτω φραγμάτων (ενότητες 10.4, 10.5).

(β) Θεωρείστε δεδομένο πως $SPACE(0) = REG$. (Δείτε σχετικά και το πρόβλημα 2.8.11 του Παπαδημητρίου).

Αυτό σημαίνει πως κάθε κανονική γλώσσα αποφασίζεται από μια ντετερμινιστική Μ. Τ. M με είσοδο και έξοδο, όπου η M δεν χρησιμοποιεί καθόλου την ταινία εργασίας, ούτε την ταινία εξόδου μιας και απλώς αποφασίζει μια γλώσσα. Επομένως, η μόνη προσπέλαση στις ταινίες της συνίσταται στο να **διαβάζει** από την ταινία εισόδου μετακινώντας την κεφαλή αριστερά ή δεξιά.

Με βάση τα παραπάνω δείξτε το εξής: έστω μηχανή M μιας ταινίας με $L(M)$ μη κανονική. Τότε δεν μπορεί να υπάρχει πεπερασμένο κάτω φράγμα στο μήκος των crossing sequences που παράγει η M στις εισόδους που κάνει δεκτές. Δηλαδή, για κάθε $k > 0$, υπάρχει συμβολοσειρά στην $L(M)$ για την οποία η M παράγει μία crossing sequence μήκους τουλάχιστον k.

(γ) Χρησιμοποιώντας το (β), δείξτε πως οποιαδήποτε γλώσσα γίνεται δεκτή από ντετερμινιστική Μ. Τ. μιας ταινίας σε χρόνο $o(n \log n)$ είναι κανονική.