Πανεπιστημιο Αθηνων, Υπολογιστικη Πολυπλοκοτητα
Εαρινο εξαμηνο 2009-2010
Τελικο Διαγωνισμα, Ιουνιος 2010

Για τους **μεταπτυχιακούς** το άριστα είναι 20 μονάδες. Λύνετε τα Θέματα 1–4.

Για τους **προπτυχιακούς** το άριστα είναι 15 μονάδες. Διαλέγετε τρία από τα Θέματα 1–4.

Το Θέμα 5 θα μετρήσει *προσθετικά* στο βαθμό σας. Συνιστάται να αφιερώσετε το χρόνο σας στα υποχρεωτικά θέματα και μόνο αν προλαβαίνετε να ασχοληθείτε με το 5.

Θέμα 1 [5 μονάδες]. Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας στα ακόλουθα ερωτήματα. **(i)** Ισχύει $co\mathcal{RP} \subseteq \mathcal{EXP}$; **(ii)** Ισχύει $\mathcal{BPP} \subseteq \mathcal{EXP}$;

Θέμα 2 [5 μονάδες]. Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας στα ακόλουθα ερωτήματα.
(i) Έστω $t, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ δύο αύξουσες συναρτήσεις. Ορίζουμε

$$\textsc{Dtisp}(t(n), s(n)) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{ υπάρχει ντετερμινιστική Μ. Τ. } M \text{ η οποία αποφασίζει την } L \text{ και τρέχει σε χρόνο } O(t(n)) \text{ και χώρο } O(s(n))\}.$$

Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στο $\textsc{Dtisp}(t(n), s(n))$ και στο $\textsc{Time}(t(n)) \cap \textsc{Space}(s(n))$;
(ii) ΑΛΗΘΕΣ Ή ΨΕΥΔΕΣ; Έστω αναγωγή τ από μια γλώσσα L_1 σε μια γλώσσα L_2 όπου η τ υπολογίζεται σε χρόνο 2^n. Αν $L_2 \in \textsc{Time}(2^n)$, τότε $L_1 \in \textsc{Time}(2^{O(n)})$.
(iii) ΑΛΗΘΕΣ Ή ΨΕΥΔΕΣ; $co\mathcal{RP} \subset \mathcal{P}/poly$.

Θέμα 3 [5 μονάδες]. Δίνονται $s(n) \geq \log n$ και $t(n) \geq n$. Δείξτε πως οποιαδήποτε γλώσσα αποφασίζεται από μια μη ντετερμινιστική Μ. Τ. N η οποία τρέχει σε χρόνο $t(n)$ και χώρο $s(n)$, μπορεί να αποφασιστεί και από μια ντετερμινιστική Μ. Τ. σε χώρο $s(n) \log t(n)$.

Εαν χρειαστεί να υποθέσετε κάποιες ιδιότητες για τις $s(n)$ και $t(n)$, διατυπώστε τες με σαφήνεια. Πάντως η ιδανική λύση δεν απαιτεί επιπλέον περιορισμούς.

Θέμα 4 [5 μονάδες]. Δείξτε πως το ακόλουθο πρόβλημα ειναι $\mathcal{NP}$-complete.
Εισοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, θετικός ακέραιος $K \leq |V|$.

Ερωτημα: Μπορεί το V να διαμεριστεί σε $k \leq K$ ξένα σύνολα $V_1, V_2, \ldots, V_k$ έτσι ώστε για $1 \leq i \leq k$, το υπογράφημα που επάγεται από το V_i να είναι άκυκλο (δηλ. να είναι δάσος);

Θέμα 5 [3 μονάδες]. Δείξτε πως το ακόλουθο πρόβλημα ειναι $\mathcal{NP}$-complete.
Εισοδος: Συλλογή C υποσυνόλων ενός πεπερασμένου συνόλου S. (Δηλ. $C \subseteq 2^S$.)
Ερωτημα: Διαθέτοντας δύο χρώματα, μπορούμε να χρωματίσουμε τα στοιχεία του S (κάθε στοιχείο με ένα χρώμα), ώστε κανένα υποσύνολο της συλλογής C να μην είναι μονοχρωματικό;