Πανεπιστημιο Αθηνων, Υπολογιστικη Πολυπλοκοτητα
Εαρινο εξαμηνο 2009-2010
Τελικο Διαγωνισμα, Σεπτεμβριος 2010

Για τους **μεταπτυχιακούς** το άριστα είναι 20 μονάδες. Λύνετε τα Θέματα 1–4.

Για τους **προπτυχιακούς** το άριστα είναι 15 μονάδες. Διαλέγετε τρία από τα Θέματα 1–4.

Το Θέμα 5 θα μετρήσει *προσθετικά* στο βαθμό σας. Συνιστάται να αφιερώσετε το χρόνο σας στα υποχρεωτικά θέματα και αν προλαβαίνετε να ασχοληθείτε με το 5.

Θέμα 1 [5 μονάδες]. Έστω μη ντετερμινιστική Μηχανή Turing $N = (K, \Sigma, \Delta, s)$ η οποία τρέχει σε χρόνο $t(n)$. Η καλύτερη γνωστή προσομοίωση της N από ντετερμινιστική Μ. Τ. απαιτεί χρόνο εκθετικό στο $t(n)$. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τρόποι να γίνει αυτή η προσομοίωση: (1) Ψάξιμο στο δέντρο όπου κάθε μονοπάτι αναπαριστά έναν υπολογισμό της N με είσοδο x και (2) Ψάξιμο στο (ακυκλικό) configuration graph της N με είσοδο x. Για τις δύο αυτές μεθόδους:
(i) Προσδιορίστε την πολυπλοκότητα χώρου των αντίστοιχων ντετερμινιστικών μηχανών.
(ii) Προσδιορίστε με ακρίβεια την πολυπλοκότητα χρόνου των αντίστοιχων ντετερμινιστικών μηχανών. Προσέξτε την εξάρτηση του χρόνου εκτέλεσης από το μέγεθος της περιγραφής της N.

Θέμα 2 [5 μονάδες]. Έστω μία γλώσσα A η οποία είναι $DSPACE(n)$-hard. Αποδείξτε πως η A είναι και $PSPACE$-hard.

Θέμα 3 [5 μονάδες]. Κατατάξτε τις παρακάτω προτάσεις σε μία από τις τρεις κατηγορίες: «σωστή», «λάθος», «δεν γνωρίζουμε». Δώστε μία σύντομη δικαιολόγηση κάθε απάντησης.

Αρνητική βαθμολογία -0.5 για κάθε λάθος απάντηση. (Καθόλου απάντηση = λάθος).

(1) Αν $P \neq NP$, υπάρχουν προβλήματα στο NP που δεν είναι NP-complete.
(2) $coNL = L$.
(3) Αν έχουμε ψευδοπολυωνυμικό αλγόριθμο για ένα πρόβλημα Π που είναι strongly NP-complete τότε $coNP = P$.
(4) Αν $P = NP$, κανένα πρόβλημα στο NP δεν είναι strongly NP-complete.
(5) $coNP \cap NP \supseteq L$.

Θέμα 4 [5 μονάδες]. Ένας πίνακας με στοιχεία 0 και 1 είναι *ευτυχισμένος* αν μπορούμε να μεταθέσουμε τις γραμμές του έτσι ώστε σε κάθε στήλη όλοι οι άσοι να είναι συνεχόμενοι.

Αποδείξτε πως το παρακάτω πρόβλημα είναι NP-complete. Δίνεται $n \times m$ πίνακας A με στοιχεία 0 και 1, και φυσικός αριθμός K. Υπάρχει ευτυχισμένος $n \times K$ υποπίνακας B του A;

Θέμα 5 [3 μονάδες]. Δείξτε πως το ακόλουθο πρόβλημα ειναι $\mathcal{NP}$-complete.
Εισοδος: Συλλογή C υποσυνόλων ενός πεπερασμένου συνόλου S. (Δηλ. $C \subseteq 2^S$.)
Ερωτημα: Διαθέτοντας δύο χρώματα, μπορούμε να χρωματίσουμε τα στοιχεία του S (κάθε στοιχείο με ένα χρώμα), ώστε κανένα υποσύνολο της συλλογής C να μην είναι μονοχρωματικό;