

# Παραδεικτές και Συνεπείς Ευρετικές Συναρτήσεις

Μανόλης Κουμπάρκης

# Διαισθητικοί Ορισμοί

- Μια ευρετική συνάρτηση είναι **παραδεκτή** όταν δεν υπερεκτιμά το πραγματικό κόστος εύρεσης λύσης. Δηλαδή, μια ευρετική συνάρτηση δίνει πάντα ένα (θετικό) κάτω φράγμα στο πραγματικό κόστος.
- Μια ευρετική συνάρτηση είναι **συνεπής** αν, για κάθε ενέργεια με κόστος  $c$ , η εκτέλεση αυτής της ενέργειας έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση της ευρετικής συνάρτησης κατά το πολύ  $c$ .

# Πρόταση

- Κάθε συνεπής ευρετική συνάρτηση είναι παραδεκτή.

# Απόδειξη

- Μια ευρετική συνάρτηση  $h$  είναι **συνεπής** αν και μόνο αν για κάθε κόμβο  $n$  και κάθε διάδοχο κόμβο  $n'$  που παράγεται από μια ενέργεια  $a$  έχουμε το εξής:

$$h(n) \leq c(n, a, n') + h(n')$$

- Θα συμβολίζουμε με  $k(n)$  το κόστος του συντομότερου μονοπατιού από τον κόμβο  $n$  σε ένα κόμβο στόχου.
- Έστω ένας κόμβος  $n$  για τον οποίο ισχύει η συνέπεια. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και η παραδεκτότητα δηλαδή  $h(n) \leq k(n)$ .
- Η απόδειξη θα γίνει με **επαγωγή** ως προς τον αριθμό  $i$  των κόμβων στο συντομότερο μονοπάτι από τον  $n$  προς ένα κόμβο στόχου.

# Απόδειξη

- **Περίπτωση βάσης:**  $i = 0$  (το συντομότερο μονοπάτι από τον  $n$  σε ένα κόμβο στόχου περιλαμβάνει μηδέν κόμβους).
- Άρα ο  $n$  είναι κόμβος στόχου. Τότε  $h(n) = 0 \leq k(n)$
- Άρα η  $h$  είναι παραδεκτή.

# Απόδειξη

- **Επαγωγικό βήμα:** Ας υποθέσουμε ότι το συντομότερο μονοπάτι από τον  $n$  προς ένα κόμβο στόχου έχει  $i$  κόμβους.
- Τότε υπάρχει ένας κόμβος  $n'$  διάδοχος του  $n$  για τον οποίο το συντομότερο μονοπάτι προς ένα κόμβο στόχου έχει  $i - 1$  κόμβους.
- Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση, η συνθήκη παραδεκτότητας ισχύει για τον  $n'$ .
- Από τη συνθήκη συνέπειας του  $n$  και τη συνθήκη παραδεκτότητας του  $n'$  έχουμε
$$h(n) \leq c(n, a, n') + h(n') \leq c(n, a, n') + k(n') = k(n)$$
- Άρα η συνθήκη παραδεκτότητας ισχύει για τον  $n$ .

# Πρόταση

- Αν μια ευρετική συνάρτηση είναι **συνεπής**, τότε οι τιμές της  $f = g + h$  κατά μήκος μιας διαδρομής που εξετάζει ο  $A^*$  **δεν μειώνονται**.

# Απόδειξη

- Δείτε τις άλλες διαφάνειες.



# Συμπέρασμα

- Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, αν η  $h$  είναι συνεπής τότε οι κόμβοι που επεκτείνονται από τον  $A^*$  σχηματίζουν μια **μη φθίνουσα** ως προς το  $f(n)$  ακολουθία.
- Πολλές φορές μπορούμε να δούμε ότι μια ευρετική συνάρτηση **δεν είναι συνεπής** εξετάζοντας την ακολουθία των τιμών της  $f$ .