Η Λογική Πρώτης Τάξης

Η **λογική πρώτης τάξης (first-order logic)** ή **κατηγορηματική λογική πρώτης τάξης (first-order predicate logic)** είναι μια λογική πιο εκφραστική από την προτασιακή λογική που καλύπτει ένα μεγάλο μέρος των απαιτήσεων που έχουμε από μια γλώσσα αναπαράστασης γνώσης.

Θέματα που θα μελετήσουμε:

- Συντακτικό (αυτή η παρουσίαση)
- Σημασιολογία
- Θεωρία αποδείξεων - Συμπερασμός

Οντολογικές Υποθέσεις της Λογικής Πρώτης Τάξης

- Ο κόσμος αποτελείται από **αντικείμενα (objects)**.
- Τα αντικείμενα συμμετέχουν σε **σχέσεις (relations)** με άλλα αντικείμενα. Μερικές από αυτές τις σχέσεις είναι **συναρτήσεις (functions)**.
- Οι σχέσεις μεταξύ αντικειμένων μπορεί να **αληθεύουν ή να μην αληθεύουν** στον κόσμο που μοντελοποιούμε.

Αυτές οι οντολογικές υποθέσεις κάνουν τη λογική πρώτης τάξης χρησιμότερη από την προτασιακή λογική σαν γλώσσα αναπαράστασης γνώσης.

Λογική Πρώτης Τάξης: Συντακτικό

Τα σύμβολα της λογικής πρώτης τάξης (με ισότητα) είναι τα ακόλουθα:

- Παρενθέσεις: $(,)$.
- Οι λογικοί σύνδεσμοι: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$.
- Ένα αριθμήσιμο απειροσύνολο **μεταβλητών**. Το σύνολο αυτό θα το συμβολίζουμε με $Vars$.

  Παραδείγματα: x, y, v, $\ldots$

Σύμβολα

- Τα **σύμβολα ποσοδεικτών (quantifier symbols)**: $\forall, \exists$

  Το σύμβολο $\forall$ λέγεται **καθολικός** ποσοδείκτης ενώ το $\exists$ **υπαρξιακός**.

- Το **σύμβολο της ισότητας (equality symbol)** $=$

Σύμβολα

- Ένα αριθμήσιμο άπειροσύνολο που περιέχει **σύμβολα σταθερών (constant symbols)**.

  Παραδείγματα: $John$, $Mary$, 5, 6, $Ball123$, ...

- **Σύμβολα συναρτήσεων (function symbols)**: Για κάθε θετικό ακέραιο n, έχουμε ένα σύνολο (πιθανώς κενό) που περιέχει n-**αδικά σύμβολα συναρτήσεων**.

  Παραδείγματα:
  $FatherOf(\cdot)$, $BestFriendOf(\cdot)$, $Cosine(\cdot), Sum(\cdot,\cdot), \ldots$

Σύμβολα

- **Σύμβολα κατηγορημάτων (predicate symbols)**: Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n, έχουμε ένα σύνολο (πιθανώς κενό) που περιέχει n-**αδικά σύμβολα κατηγορημάτων**.

  Παραδείγματα: $Happy(\cdot)$, $Brother(\cdot,\cdot)$, $Arrives(\cdot,\cdot,\cdot),\ldots$

Σύμβαση: Τα σύμβολα μεταβλητών θα αρχίζουν με μικρό γράμμα του Αγγλικού αλφάβητου, ενώ τα σύμβολα σταθερών, συναρτήσεων και κατηγορημάτων με κεφαλαίο.

Η Έννοια του Λεξιλογίου

Θα χρησιμοποιούμε τον όρο **λεξιλόγιο (vocabulary)** για να αναφερόμαστε στα σύνολα συμβόλων σταθερών, συναρτήσεων και κατηγορημάτων που θα χρησιμοποιούμε για να μοντελοποιήσουμε ένα πεδίο εφαρμογών.

Έχοντας ένα λεξιλόγιο, μπορούμε να κατασκευάσουμε εκφράσεις της λογικής πρώτης τάξης. Θα διακρίνουμε τις ακόλουθες κατηγορίες εκφράσεων:

- Όροι
- Ατομικοί τύποι
- Καλά ορισμένοι τύποι ή πιο απλά τύποι.

Όροι

Οι **όροι (terms)** είναι εκφράσεις της λογικής πρώτης τάξης που παριστάνουν αντικείμενα στον κόσμο που μοντελοποιούμε. Το σύνολο των όρων θα το συμβολίζουμε με $Terms$.

Η ακόλουθη γραμματική δίνει το συντακτικό των όρων:

$$\begin{aligned} Term \rightarrow\ & ConstantSymbol \mid Variable \\ & \mid FunctionSymbol(Term, \ldots, Term) \end{aligned}$$

Παραδείγματα Όρων

$$John$$

$$x$$

$$FatherOf(John)$$

$$WifeOf(FatherOf(x))$$

$$Sum(1,2)$$

$$Sum(x, Sum(1,2))$$

Ατομικοί Τύποι

Οι **ατομικοί τύποι (atomic formulas)** είναι εκφράσεις της λογικής πρώτης τάξης που παριστάνουν απλά γεγονότα ή απλές σχέσεις ανάμεσα σε αντικείμενα του κόσμου που μοντελοποιούμε.

Η ακόλουθη γραμματική δίνει το συντακτικό των ατομικών τύπων:

$$\begin{aligned} AtomicFormula \rightarrow\ & Term = Term \\ & \mid PredicateSymbol(Term, \ldots, Term) \end{aligned}$$

Παραδείγματα Ατομικών Τύπων

$$John = ElderSonOf(Mary)$$

$$John = ElderSonOf(FatherOf(John))$$

$$Sum(1, Sum(2, 3)) = 6$$

$$Happy(John)$$

$$EvenNumber(Sum(1, Sum(2, 3)))$$

$$LivesIn(John, London)$$

$$Arrives(John, Athens, Monday)$$

Καλά Ορισμένοι Τύποι

Οι **καλά ορισμένοι τύποι (well-formed formulas ή wffs)** είναι το πιο πολύπλοκο είδος εκφράσεων της λογικής πρώτης τάξης. Μπορούν να περιγράφουν πολύπλοκες καταστάσεις στον κόσμο που μοντελοποιούμε.

Η ακόλουθη γραμματική δίνει το συντακτικό των καλά ορισμένων τύπων:

$$\begin{aligned} Wff \rightarrow\ & AtomicFormula \mid (\ Wff\ ) \mid \neg\, Wff \\ & \mid Wff\ BinaryConnective\ Wff \\ & \mid (\ Quantifier\ Variable\ )\ Wff \end{aligned}$$

Παραδείγματα Καλά Ορισμένων Τύπων

$$\neg Loves(Tony, Mary)$$

$$Loves(Tony, Paula) \lor Loves(Tony, Fiona)$$

$$Loves(John, Paula) \land Loves(John, Fiona)$$

$$(\forall x)(SportsCar(x) \land HasDriven(Mike, x) \Rightarrow Likes(Mike, x))$$

$$(\exists x)(SportsCar(x) \land Owns(John, x))$$

$$(\forall x)(Greek(x) \land (\forall y)(IsChildOf(y, x) \Rightarrow UniversityAlumni(y)) \Rightarrow Proud(x))$$

Παραδείγματα Καλά Ορισμένων Τύπων

$$(\forall x)(Integer(x) \wedge Even(x) \Rightarrow Odd(Sum(x, 1)))$$

$$(\forall x)(Integer(x) \Rightarrow (\exists y)(Integer(y) \wedge SmallerThan(y, x)))$$

Προτεραιότητα

Όπως είπαμε και για την προτασιακή λογική, δεν υπάρχουν αποδεκτοί απ΄ όλους κανόνες προτεραιότητας τελεστών για τη λογική πρώτης τάξης.

Οι κανόνες προτεραιότητας που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι εξής. Οι λογικοί σύνδεσμοι $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$ έχουν την προτεραιότητα που ορίσαμε στην προτασιακή λογική. Οι ποσοδείκτες έχουν την ίδια προτεραιότητα με τον $\neg$.

Δηλαδή, η προτεραιότητα είναι (από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη):

- $\neg$, $\forall$ και $\exists$
- $\wedge$
- $\vee$
- $\Rightarrow$
- $\Leftrightarrow$

Ποσοδείκτες: Διαφορές από το Βιβλίο AIMA

- Στο βιβλίο AIMA οι ποσοδείκτες γράφονται **χωρίς παρενθέσεις**. Δηλαδή, θα δείτε

$$\exists x \; Stole(x, MyWallet)$$

$$\forall x \; Integer(x) \Rightarrow Even(x) \vee Odd(x)$$

αντί για

$$(\exists x) Stole(x, MyWallet)$$

$$(\forall x)(Integer(x) \Rightarrow Even(x) \vee Odd(x))$$

που θα δείτε στις διαφάνειες. Και οι δύο συμβολισμοί είναι αποδεκτοί και συνήθεις σε βιβλία Λογικής και Τεχνητής Νοημοσύνης.

Ποσοδείκτες: Διαφορές από το Βιβλίο AIMA

Προσοχή: Το βιβλίο υποθέτει (σιωπηρά) ότι οι ποσοδείκτες έχουν προτεραιότητα **μικρότερη** από όλους τους λογικούς συνδέσμους. Οι διαφάνειες μου **δεν** ακολουθούν το βιβλίο σ΄ αυτό το σημείο.

Δηλαδή, στο βιβλίο θα βρείτε τον τύπο

$$\forall x \; Integer(x) \Rightarrow Even(x) \vee Odd(x)$$

που κωδικοποιεί σωστά το γεγονός ότι κάθε ακέραιος είναι άρτιος ή περιττός με δεδομένη την προτεραιότητα που υποθέτει το βιβλίο.

Στις διαφάνειες μου αυτό θα γράφεται ως εξής:

$$(\forall x)(Integer(x) \Rightarrow Even(x) \vee Odd(x))$$

Στις ασκήσεις και τις εξετάσεις, μπορείτε να ακολουθήσετε τις διαφάνειες ή το βιβλίο. Όμως πρέπει να εξηγήσετε ποιο συμβολισμό ακολουθείτε, και να τον εφαρμόσετε με συνέπεια.

Εμφανίσεις Μεταβλητών

Μια μεταβλητή μπορεί να εμφανίζεται πολλές φορές σ΄ ένα τύπο. Για παράδειγμα, η μεταβλητή x εμφανίζεται δύο φορές στον παρακάτω τύπο:

$$(\exists x)(SportsCar(x) \land Owns(John, x))$$

Προσοχή: Δεν μετράμε την εμφάνιση στον ποσοδείκτη $(\exists x)$ ο οποίος εισάγει την μεταβλητή.

Οι **εμφανίσεις (occurences)** μεταβλητών σ΄ ένα τύπο μπορεί να είναι **ελεύθερες (free)** ή **δεσμευμένες (bound)**.

Ελεύθερες Εμφανίσεις Μεταβλητών

Ο παρακάτω αναδρομικός ορισμός ορίζει την έννοια της **ελεύθερης εμφάνισης μιας μεταβλητής σ΄ ένα τύπο**:

- Οποιαδήποτε εμφάνιση μιας μεταβλητής x σ΄ ένα ατομικό τύπο ϕ είναι ελεύθερη.
- Μια εμφάνιση μιας μεταβλητής x στον τύπο $\neg\phi$ είναι ελεύθερη ανν η εμφάνιση αυτή είναι ελεύθερη στον τύπο ϕ.
- Μια εμφάνιση μιας μεταβλητής x στον τύπο $\phi \wedge \psi$ είναι ελεύθερη ανν η εμφάνιση αυτή είναι ελεύθερη στον τύπο ϕ ή στον τύπο ψ. Ομοίως και για τους υπόλοιπους δυαδικούς συνδέσμους.
- Μια εμφάνιση μιας μεταβλητής x στον τύπο $(\forall v)\phi$ είναι ελεύθερη ανν η εμφάνιση αυτή είναι ελεύθερη στον ϕ και η x είναι διαφορετική από την v. Αντίστοιχα για τον ποσοδείκτη $\exists$.

Δεσμευμένες Εμφανίσεις Μεταβλητών

Ορισμός. Αν μια εμφάνιση μεταβλητής δεν είναι ελεύθερη σ΄ ένα τύπο, τότε η εμφάνιση αυτή λέγεται **δεσμευμένη (bound)** στον τύπο αυτό.

Παραδείγματα

- Η εμφάνιση της μεταβλητής x στον τύπο $Brother(x, John)$ είναι ελεύθερη.
- Κάθε εμφάνιση της μεταβλητής x στον τύπο

$$(\forall x)(Cat(x) \Rightarrow Mammal(x))$$

δεν είναι ελεύθερη (είναι δεσμευμένη).

- Κάθε εμφάνιση της μεταβλητής y στον τύπο

$$(\forall x)(Friend(x, y) \Rightarrow Loves(x, y))$$

είναι ελεύθερη.

- Κάθε εμφάνιση της μεταβλητής y στον τύπο

$$(\forall x)(\forall y)(Friend(x, y) \Rightarrow Loves(x, y))$$

είναι δεσμευμένη.

Παραδείγματα

- Θεωρήστε τον τύπο

$$((\forall x)P(x)) \land S(x).$$

  Η πρώτη εμφάνιση της μεταβλητής x στον παραπάνω τύπο (δηλαδή η εμφάνιση στον $P(x)$) είναι δεσμευμένη. Η δεύτερη εμφάνιση της μεταβλητής x (δηλαδή η εμφάνιση στον $S(x)$) είναι ελεύθερη.

- Θεωρήστε τον τύπο

$$(\forall x)(P(x) \land (\forall x)(S(x) \lor R(x))).$$

  Όλες οι εμφανίσεις της μεταβλητής x στον παραπάνω τύπο είναι δεσμευμένες.

Εμβέλεια Ποσοδεικτών

Η **εμβέλεια (scope)** ενός ποσοδείκτη $(\forall x)\phi$ ή $(\exists x)\phi$ είναι ο τύπος ϕ.

Προσοχή: Η μεταβλητή x δεν είναι απαραίτητο να εμφανίζεται στον τύπο ϕ. Σ' αυτή την περίπτωση, ο τύπος $(\forall x)\phi$ ή $(\exists x)\phi$ είναι ισοδύναμος με τον ϕ.

Μια εμφάνιση μεταβλητής μπορεί να βρίσκεται στην εμβέλεια πολλών ποσοδεικτών. Η **στενότερη εμβέλεια** στην οποία βρίσκεται μια δεσμευμένη εμφάνιση μεταβλητής καθορίζει τον ποσοδείκτη που τη δεσμεύει.

Παραδείγματα

Ποιος ποσοδείκτης δεσμεύει κάθε εμφάνιση των μεταβλητών x, y και z στους παρακάτω τύπους;

$$(\forall x)(\exists z)P(x,z)$$

$$(\forall x)S(x) \wedge (\forall y)R(x,y)$$

$$(\forall x)P(x,y) \wedge (\forall y)R(x,y)$$

$$(\forall x)(\forall x)S(x)$$

Ελεύθερες Μεταβλητές

Ορισμός. Έστω ϕ ένας τύπος. Μια μεταβλητή x που έχει μια ελεύθερη εμφάνιση στον ϕ λέγεται **ελεύθερη μεταβλητή** του ϕ.

Παραδείγματα:

- Η μεταβλητή x είναι ελεύθερη μεταβλητή του τύπου $Brother(x, John)$.
- Η μεταβλητή x είναι ελεύθερη μεταβλητή του τύπου

$$((\forall x)P(x)) \land S(x)$$

  άλλα όχι του τύπου $(\forall x)P(x)$.

Προτάσεις

Ορισμός. Αν ένας καλά ορισμένος τύπος ϕ δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές, τότε ο ϕ λέγεται **πρόταση (sentence)**.

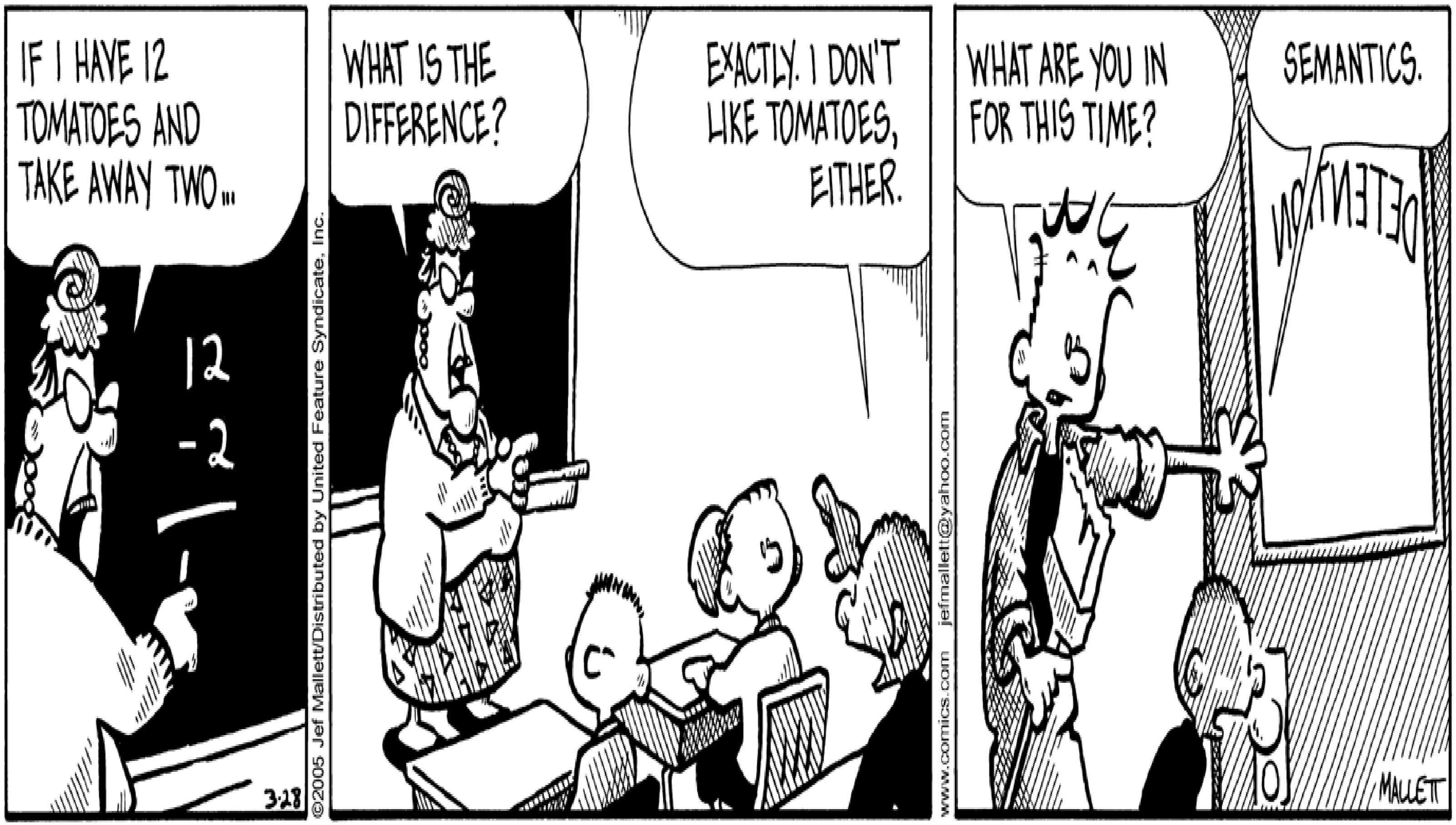
Παραδείγματα: Ο τύπος

$$(\forall x)(Cat(x) \Rightarrow Mammal(x))$$

είναι πρόταση.

Ο τύπος $Brother(x, John)$ δεν είναι πρόταση.

Μικρό Διάλειμμα



Αναπαράστασης Γνώσης και Φυσικές Γλώσσες

Προτιμούμε να χρησιμοποιούμε **τυπικές και όχι φυσικές γλώσσες** για αναπαράσταση γνώσης. Μια φυσική γλώσσα δεν είναι κατάλληλη για αναπαράσταση γνώσης επειδή:

- Είναι κυρίως μέσο επικοινωνίας και όχι αναπαράστασης.
- Είναι αμφίσημη (ambiguous).
- Είναι μη συνθετική (non-compositional).

Μπορούμε να παραστήσουμε στη λογική πρώτης τάξης μη αμφίσημες προτάσεις φυσικών γλωσσών που περιγράφουν τον κόσμο που μοντελοποιούμε.

Όμως χρειάζεται να καταλάβουμε πλήρως την πρόταση που μας δίνεται και να είμαστε προσεκτικοί!

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

Κατ΄ αρχήν δεν πρέπει να ξεχνάμε τις **οντολογικες υποθέσεις** της λογικής πρώτης τάξης:

- Ο κόσμος αποτελείται από **αντικείμενα (objects)**.

  Παραδείγματα: Ο Γιάννης, η Μαρία, ο Αζόρ, ο Παρθενώνας, το βάζο, το φεγγάρι, το νερό, η ειρήνη

- Τα αντικείμενα συμμετέχουν σε **σχέσεις (relations)** με άλλα αντικείμενα. Μερικές από αυτές τις σχέσεις είναι **συναρτήσεις (functions)**.

  Παραδείγματα:

  – Ο Γιάννης αγαπάει τη Μαίρη.

  – Ο Γιάννης είναι ο πατέρας του Πέτρου.

- Οι σχέσεις μεταξύ αντικειμένων μπορεί να **αληθεύουν ή να μην αληθεύουν** στον κόσμο που μοντελοποιούμε.

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

- Τα αντικείμενα του κόσμου που μοντελοποιούμε παριστάνονται από **όρους**.
- Οι **ατομικοί τύποι** παριστάνουν απλά γεγονότα ή απλές σχέσεις ανάμεσα σε αντικείμενα του κόσμου.
- Οι **καλά ορισμένοι τύποι** περιγράφουν πολύπλοκες καταστάσεις στον κόσμο.

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

Αν δούμε τη δομή μιας φυσικής γλώσσας (π.χ., της Ελληνικής), θα διακρίνουμε εύκολα τα ακόλουθα βασικά μέρη του λόγου:

- **Ουσιαστικά:** Τα ουσιαστικά είναι οι κλιτές λέξεις που χρησιμοποιούμε για να αναφερόμαστε σε ότι απαρτίζει το κόσμο που μας περιβάλλει.

  Παραδείγματα: Γιάννης, Μαρία, Αζόρ, Παρθενώνας, βάζο, φεγγάρι, νερό, ειρήνη κλπ.

  Τα ουσιαστικά μπορούν να παρασταθούν από **σταθερές** στη λογική πρώτης τάξης.

Σημείωση: Οι ορισμοί των μερών του λόγου είναι από τη σύντομη γραμματική που συνοδεύει το λεξικό του Γ. Μπαμπινιώτη 'Λεξικό για το Σχολείο και το Γραφείο'.

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

- **Ρήματα:** Τα ρήματα είναι κλιτές λέξεις που χρησιμοποιούμε για να δηλώσουμε ότι ένα πρόσωπο, ζώο ή πράγμα ενεργεί, δέχεται μια ενέργεια ή βρίσκεται σε μια κατάσταση.

  Παραδείγματα:

  – Ο Αζόρ παίζει με τη μπάλα.

  – Ο Γιάννης αγαπάει τη Μαίρη.

  – Ο Γιάννης κοιμάται.

  Τα ρήματα μπορούν να παρασταθούν από **κατηγορήματα** στη λογική πρώτης τάξης.

Παραδείγματα

- Ο Αζόρ παίζει με τη μπάλα.

  $$Plays(Azor, Ball)$$

  Έδω έχουμε ένα ρήμα (παίζει) που περιγράφει τη σχέση ανάμεσα σε δύο ουσιαστικά.

- Ο Γιάννης αγαπάει τη Μαίρη.

  $$Loves(John, Mary)$$

  Έδω έχουμε ένα ρήμα (αγαπάει) που περιγράφει τη σχέση ανάμεσα σε δύο ουσιαστικά.

- Ο Γιάννης κοιμάται.

  $$Asleep(John)$$

  Έδω έχουμε ένα ρήμα (κοιμάται) που δείχνει ότι ένα πρόσωπο (Γιάννης) βρίσκεται σε μια κατάσταση.

Παραδείγματα

- Ο Γιάννης είναι ο πατέρας του Πέτρου.

$$John = FatherOf(Peter)$$

Εδώ έχουμε δύο ουσιαστικά (Γιάννης, Πέτρος), μια σχέση μεταξύ τους που είναι συνάρτηση (πατέρας του) και μια σχέση ισότητας που περιγράφεται από το ρήμα 'είναι'.

Προσοχή: Δεν θα ήταν λάθος να παραστήσουμε την παραπάνω φράση με τον ατομικό τύπο

$$IsFatherOf(John, Peter).$$

Η αναπαράσταση όμως που χρησιμοποιεί συνάρτηση είναι ακριβέστερη.

Παραδείγματα

Ενα άλλο **σημαντικό θέμα** που θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας για να αποφασίσουμε αν θα χρησιμοποιήσουμε σύμβολο κατηγορήματος ή συνάρτησης για να αναπαραστήσουμε μια συναρτησιακή σχέση, είναι τι σκοπεύουμε να κάνουμε τον τύπο που θα γράψουμε.

Παράδειγμα: Αν χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω τύπο σε κάποια μέθοδο συμπερασμού που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια (π.χ., ανάλυση), τότε η δεύτερη αναπαράσταση (με κατηγόρημα) είναι καλύτερη μια και η χρήση ισότητας στις μεθόδους συμπερασμού που θα παρουσιάσουμε απαιτεί ειδικές τεχνικές (δείτε τις σημειώσεις για ανάλυση και ισότητα).

Παραδείγματα

- Η Ελλάδα συνορεύει με την Βουλγαρία.

$$HasCommonBorderWith(Greece, Bulgaria)$$

Εδώ έχουμε δύο ουσιαστικά (Ελλάδα, Βουλγαρία) και ένα ρήμα (συνορεύει) που περιγράφει μια σχέση μεταξύ τους.

- Η Κρήτη βρίσκεται βόρεια από την Αφρική.

$$IsNorthOf(Crete, Africa)$$

Εδώ έχουμε δύο ουσιαστικά (Κρήτη, Αφρική) και ένα ρήμα (βρίσκεται) που μαζί με ένα τοπικό επίρρημα (βόρεια) εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στα δύο ουσιαστικά.

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

- **Επίθετα:** Τα επίθετα είναι κλιτές λέξεις που αποδίδουν ιδιότητα ή χαρακτηριστικό στο ουσιαστικό που αναφέρονται, το προσδιορίζουν δηλαδή ακριβέστερα και εξειδικεύουν τη σημασία του.

  Παραδείγματα: Ο Αζόρ είναι έξυπνο σκυλί.

  Στη λογική πρώτης τάξης, ένα επίθετο μπορεί να παρασταθεί από ένα **μοναδιαίο κατηγόρημα** με όρισμα τον όρο που παριστάνει το ουσιαστικό στο οποίο αναφέρεται το επίθετο.

Παραδείγματα

- Ο Γιάννης είναι ψηλός.

$$Tall(John)$$

  Εδώ έχουμε ένα επίθετο (ψηλός) που συνδέεται με το ουσιαστικό (Γιάννης) με συνδετικό ρήμα (είναι).

- Η μύτη του Πινόκιο είναι μεγάλη.

$$Big(NoseOf(Pinocchio))$$

  Εδώ έχουμε ένα επίθετο (μεγάλη) που προσδιορίζει ένα αντικείμενο (η μύτη του Πινόκιο) που μπορεί να περιγραφεί από ένα όρο.

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

- Είναι καλό να διαλέγουμε **περιγραφικά σύμβολα** σταθερών, συναρτήσεων και κατηγορημάτων και να ακολουθούμε με συνέπεια τις συμβάσεις μας (π.χ., τη χρήση του συνδετικού 'Of' στα σύμβολα συναρτήσεων).

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

- Η συμμετοχή ενός αντικειμένου σ΄ ένα σύνολο (ή κλάση ή κατηγορία) αντικειμένων παριστάνεται με ένα **μοναδιαίο κατηγόρημα** που παριστάνει το σύνολο (ή την κλάση ή την κατηγορία) και όρισμα το αντικείμενο.
- Ο συμπλεκτικός σύνδεσμος 'και' μας παραπέμπει στη χρήση **σύζευξης**.
- Ο διαζευκτικός σύνδεσμος 'ή' μας παραπέμπει στη χρήση **διάζευξης**.
- Λέξεις που δηλώνουν άρνηση ('δεν', 'μη', κλπ.) μας παραπέμπουν στη χρήση **άρνησης**.

Παραδείγματα

- Ο Αζόρ είναι έξυπνο σκυλί.

$$Dog(Azor) \wedge Clever(Azor)$$

Εδώ έχουμε συμμετοχή του Αζόρ σε μια κατηγορία (σκυλιά) και ένα επίθετο (έξυπνος) που προσδιορίζει τον Αζορ.

Προσοχή: Είναι συντακτικό λάθος να γράφουμε $Azor = Clever(Dog)$!!! (επειδή το $Clever$ είναι κατηγόρημα).

- Η Ελλάδα και η Βουλγαρία είναι χώρες.

$$Country(Greece) \wedge Country(Bulgaria)$$

Εδώ έχουμε τα αντικείμενα Ελλάδα και Βουλγαρία που είναι στοιχεία ενός συνόλου (χώρες).

Προσοχή: Δεν επιτρέπεται από το συντακτικό να γράφουμε $Country(Greece \wedge Bulgaria)$!!!

Παραδείγματα

- Η Ελλάδα και η Βουλγαρία είναι χώρες. Καμιά τους δεν συνορεύει με την Ιταλία.

$$Country(Greece) \wedge Country(Bulgaria) \wedge$$

$$\neg HasCommonBorderWith(Greece, Italy) \wedge$$

$$\neg HasCommonBorderWith(Bulgaria, Italy)$$

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

- Προτάσεις της μορφής ‘Αν ... τότε’ μας παραπέμπουν σε χρήση **συνεπαγωγής**.
- Προτάσεις της μορφής ‘Αν και μόνο αν’ ή ‘Τότε και μόνο τότε’ ή εκφράσεις που ορίζουν κάτι μας παραπέμπουν σε χρήση **διπλής συνεπαγωγής**.

Παραδείγματα

- Αν ο Γιάννης αγαπάει την πατρίδα του, τότε αγαπάει τη σημαία της.

$$Loves(John, CountryOf(John)) \Rightarrow$$

$$Loves(John, FlagOf(CountryOf(John)))$$

- Ένα δίποδο είναι ένα ζώο με δύο πόδια.

$$(\forall x)(Biped(x) \Leftrightarrow Animal(x) \wedge NumberOfFeet(x, 2))$$

Άσκηση: Να ξαναγράψετε την παραπάνω πρόταση ώστε να αποφύγουμε την χρήση του αριθμού 2.

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

- Προτάσεις με τις λέξεις ‘για κάθε’ ή ‘υπάρχει’ μας παραπέμπουν σε χρήση των ποσοδεικτών $\forall$ ή $\exists$ αντίστοιχα.
- Οι **μεταβλητές** ενός τύπου αναφέρονται σε αντικείμενα του κόσμου (και όχι σε σχέσεις ή συναρτήσεις του κόσμου).
- Οι **ποσοδείκτες** μας επιτρέπουν να μιλάμε για όλα τα αντικειμένα ή για κάποια αντικείμενα (πιθανώς άπειρα το πλήθος) που ικανοποιούν κάποια απλή ή πολύπλοκη σχέση.

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

- Ο **καθολικός ποσοδείκτης** είναι όπως μια σύζευξη με πιθανώς άπειρους όρους.
- Ο **υπαρξιακός ποσοδείκτης** είναι όπως μια διάζευξη με πιθανώς άπειρους όρους.
- Η **διάζευξη** και ο **υπαρξιακός ποσοδείκτης** είναι χρήσιμοι όταν έχουμε ατελή γνώση για ένα γεγονός ή μια σχέση ανάμεσα σε αντικείμενα.

Παραδείγματα

- Κάθε ακέραιος είναι άρτιος ή περιττός.

$$(\forall x)(Integer(x) \Rightarrow Even(x) \lor Odd(x))$$

- Μεταξύ δύο διαφορετικών ρητών αριθμών υπάρχει πάντα ένας άλλος ρητός αριθμός.

$$(\forall x)(\forall y)(Rational(x) \land Rational(y) \land x < y \Rightarrow$$

$$(\exists z)(Rational(z) \land x < z \land z < y))$$

Παραδείγματα

- Κάποιος έκλεψε το πορτοφόλι μου.

$$(\exists x) Stole(x, MyWallet)$$

- Το πορτοφόλι μου το έκλεψε ο Γιάννης ή η Μαρία.

$$Stole(John, MyWallet) \vee Stole(Mary, MyWallet)$$

Ποσοδείκτες

- Η **σειρά των ποσοδεικτών του ίδιου τύπου** δεν είναι σημαντική.

  Παράδειγμα: Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

  $$(\forall x)((\forall y)Loves(x,y))$$

  $$(\forall y)((\forall x)Loves(x,y))$$

  $$(\forall x)(\forall y)Loves(x,y)$$

  $$(\forall y)(\forall x)Loves(x,y)$$

  Συνήθως ομαδοποιούμε τους ποσοδείκτες ίδιου τύπου και γράφουμε:

  $$(\forall x,y)Loves(x,y)$$

  ή

  $$(\forall y,x)Loves(x,y)$$

Ποσοδείκτες

- Η **σειρά των ποσοδεικτών διαφορετικού τύπου** είναι σημαντική.

  Παράδειγμα: Η πρόταση

  $$(\forall x)(\exists y)Loves(x,y)$$

  δεν είναι ισοδύναμη με την

  $$(\exists x)(\forall y)Loves(x,y)$$

Ποσοδείκτες

- Η μεταβλητή z ενός ποσοδείκτη $(\forall z)$ ή $(\exists z)$ μπορεί να μετονομαστεί χωρίς πρόβλημα σε μια άλλη μεταβλητή v αν η v δεν είναι ελεύθερη στην εμβέλεια του ποσοδείκτη.

  Παραδείγματα:

  - Η πρόταση $(\forall x)P(x)$ είναι ισοδύναμη με την $(\forall y)P(y)$.
  - Η πρόταση $(\forall x)R(x,y)$ **δεν** είναι ισοδύναμη με την $(\forall y)R(y,y)$

Ποσοδείκτες

- Για να μην κάνετε εύκολα λάθος, να χρησιμοποιείτε πάντα ποσοδείκτες με **διαφορετικές μεταβλητές**.

Παράδειγμα: Γράψτε

$$(\forall x)(x = John \lor (\forall z)Happy(z))$$

αντί για

$$(\forall x)(x = John \lor (\forall x)Happy(x))$$

Ποσοδείκτες

- Ο ποσοδείκτης $\forall$ συνδυάζεται με τον λογικό σύνδεσμο $\Rightarrow$ ενώ ο $\exists$ με τον $\wedge$.

  Παράδειγμα: Κάθε βασιλιάς είναι άνθρωπος (εναλλακτικά: Κάθε βασιλιάς είναι και άνθρωπος ή Κάθε βασιλιάς είναι επίσης άνθρωπος).

  $$(\forall x)(King(x) \Rightarrow Human(x))$$

  Προσοχή: Είναι **λάθος** να παραστήσουμε την παραπάνω πρόταση με $(\forall x)(King(x) \wedge Human(x))$. Μην αφήσετε τις λέξεις ‘και’ ή ‘επίσης ’ να σας μπερδέψουν!

Τελική Οδηγία

Οι παραπάνω οδηγίες δεν είναι κανόνες που πρέπει να εφαρμόζονται με αυστηρότητα. Είναι απλά χρήσιμες συμβουλές!

Ο καλύτερος τρόπος για να γράψετε κάτι που έχει περιγραφεί στα Ελληνικά στη λογική πρώτης τάξης είναι να το κατανοήσετε πλήρως, και αφού έχετε μελετήσει σε βάθος τη λογική πρώτης τάξης, να προσπαθήσετε να το αποδώσετε!

Μελέτη

Κεφάλαιο 8 από το AIMA: Λογική Πρώτης Τάξης

Άλλες τυπικές παρουσιάσεις της λογικής πρώτης τάξης μπορεί να βρει κανείς στα εξής βιβλία:

1. Οποιοδήποτε μαθηματικό βιβλίο λογικής. Το τυπικό υλικο γι΄ αυτές τις διαφάνειες είναι από το βιβλίο:

   H.B. Enderton, "A Mathematical Introduction to Logic", Academic Press, 1972.

   Δείτε την ιστοσελίδα του μαθήματος για άλλα βιβλία λογικής.

2. M.R. Genesereth and N.J. Nilsson, "Logical Foundations of Artificial Intelligence", Morgan Kaufmann, 1987.